

Пензенский государственный технологический университет
(ПензГТУ)

Механическая модель кипы хлопка и математическая модель деформационного движения кипы.¹

Аннотация. Предлагается механическая модель кипы хлопка и её математическая модель деформационного движения. Приведено общее и частное решение уравнений движения кипы. Обосновано применение приближенного решения уравнения движения кипы.

Ключевые слова. Хлопок, кипа, механическая модель, математическая модель, деформация, уравнения движения кипы.

**Penza State Technological University
(PSTU)**

Volkov V.V.

The Mechanical Model of a Cotton Bale and the Mathematical Model of the Bale Deformational Movement.

The mechanical model of a cotton bale and its mathematical model of deformational movement are presented in this article. The author gives the general and the particular solutions of the bale movement equations.

Key words: cotton, a bale, a mathematical model, a mechanical model, deformation, equations of the bale movement.

¹ Работа выполнялась под руководством докт.техн.наук, профессора Полякова В.К. (С-ПГУТиД)

Кипу хлопка можно представить в виде механической модели с распределенными инерционными (m_0), упругими (c_0) и диссипативными (b_0) параметрами[2]. В этой модели (рисунок 1) независимой переменной является лагранжева координата z , с помощью которой определяются положения сечений кипы по высоте в недеформированном состоянии, зависимой переменной является деформационное перемещение $u(t, z)$. Площадь поперечного сечения кипы $A = 0,97 \cdot 0,6 = 0,582 \text{ м}^2$ считается неизменной в процессе деформаций, высота кипы в ненапряженном состоянии $l = 1,3 \text{ м}$, масса кипы $m = 205 \text{ кг}$, усилие прессования $Q = 42,4 \cdot 10^4 \text{ н}$. Полная деформация спрессованной кипы $\delta = 0,53 \text{ м}$. Жесткость кипы $c = \frac{Q}{\delta} = 80 \cdot 10^4 \text{ н/м}$. Погонные масса

$$\text{и жесткость кипы } m_0 = \frac{m}{l} = 157,7 \text{ кг/м}, c_0 = c \frac{l}{1(\text{м})} = 104 \cdot 10^4 \text{ н.}$$

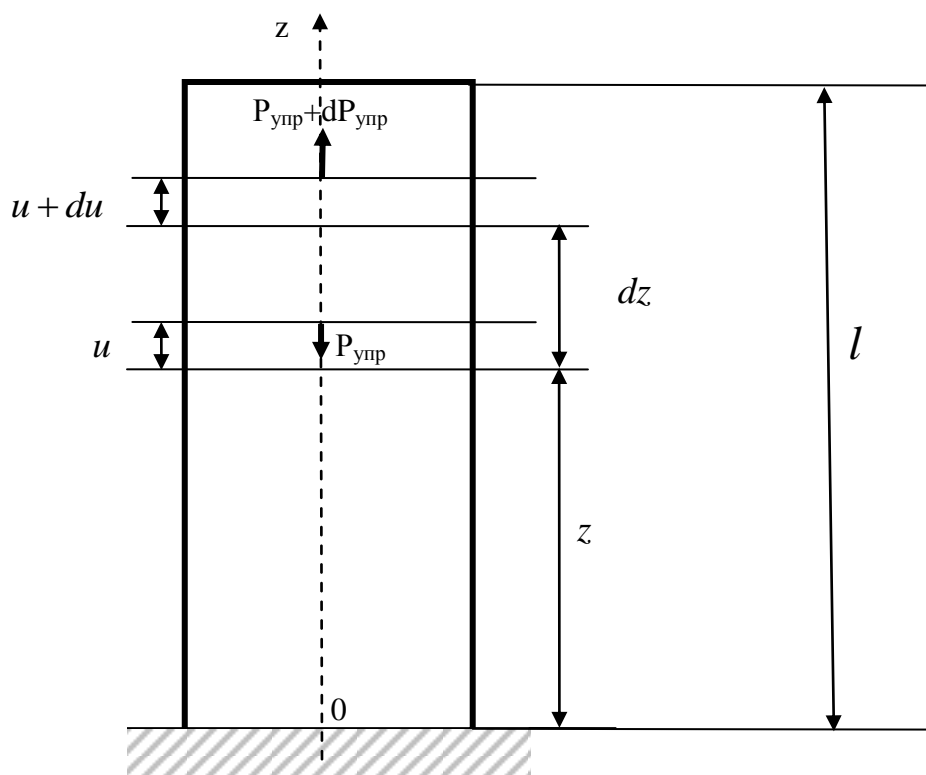


Рисунок 1. Механическая модель кипы

Выделим сечениями z и $z + dz$ произвольный недеформированный элемент кипы dz .

В результате деформации сечение z займет положение $z + u(t, z)$, а сечение $z + dz$ - положение $z + dz + u(t, z) + \frac{\partial u(t, z)}{\partial z} dz$.

Длина элемента dz в деформированном состоянии будет равна $dz + \frac{\partial u(t, z)}{\partial z} dz$, а деформация этого элемента будет равна $\frac{\partial u(t, z)}{\partial z} dz$.

Относительная деформация (отношение величины деформации к первоначальной длине выделенного элемента) будет

$$\varepsilon = \frac{\partial u(t, z)}{\partial z}. \quad (1)$$

Воспользуемся известным равенством

$$\varepsilon = \frac{\sigma(t, z)}{E} = \frac{P_{\text{упр}}}{A \cdot E}, \quad (2)$$

здесь $\sigma(t, z)$ - напряжение, E - модуль упругости, $P_{\text{упр}}$ - упругое усилие, A - площадь сечения кипы.

Так как

$$c = \frac{A \cdot E}{l}, \quad c_0 = A \cdot E, \quad c = \frac{c_0}{l},$$

то, учитывая равенства (1) и (2), найдем:

$$P_{\text{упр}}(t, z) = c_0 \varepsilon = c_0 \frac{\partial u(t, z)}{\partial z}. \quad (3)$$

Равенство (3) задает характер распределения упругих усилий по длине кипы в различные моменты времени.

В предыдущих равенствах: c - коэффициент жесткости кипы, l - высота кипы, c_0 - погонная жесткость (жесткость 1 м длины) кипы.

Применив к выделенному элементу второй закон Ньютона, получим

$$m_0 dz \frac{\partial^2 u(t, z)}{\partial t^2} = -m_0 dz g + dP_{\text{упр}}, \quad (4)$$

$$dP_{\text{уп}} = c_0 \frac{\partial^2 u(t, z)}{\partial z^2} dz. \quad (5)$$

Подставив равенство (5) в уравнение движения (4), получим

$$m_0 \frac{\partial^2 u(t, z)}{\partial t^2} - c_0 \frac{\partial^2 u(t, z)}{\partial z^2} = -m_0 g, \quad (6)$$

в этом уравнении учтена сила тяжести материала кипы.

В уравнении (6) дополнительно учтем демпфирующие свойства материала кипы, считая силы демпфирования пропорциональными скорости деформации:

$$P_{\text{демп}} = b_0 \frac{\partial^2 u(t, z)}{\partial t \partial z}, \quad (7)$$

$$dP_{\text{демп}} = b_0 \frac{\partial^3 u(t, z)}{\partial t \partial z^2} dz.$$

После учета равенств (7) получим уравнение движения в окончательном виде:

$$m_0 \frac{\partial^2 u(t, z)}{\partial t^2} - b_0 \frac{\partial^3 u(t, z)}{\partial t \partial z^2} - c_0 \frac{\partial^2 u(t, z)}{\partial z^2} = -m_0 g. \quad (8)$$

При решении уравнений движения кипы руководствуемся следующими рассуждениями. Уравнение (8) является линейным неоднородным уравнением в частных производных. Его решение состоит из суммы решений однородного и неоднородного уравнений. Найдем сначала решение однородного уравнения (10).

$$m_0 \frac{\partial^2 u(t, z)}{\partial t^2} - b_0 \frac{\partial^3 u(t, z)}{\partial t \partial z^2} - c_0 \frac{\partial^2 u(t, z)}{\partial z^2} = 0. \quad (9)$$

Одним из методов поиска решения является метод Фурье, заключающийся в представлении решения в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от времени t , другая – от координаты z :

$$u(t, z) = T(t)Z(z). \quad (10)$$

Подставив это решение в уравнение (9), получим

$$m_0 \ddot{T}(t)Z(z) - b_0 \dot{T}(t)Z''(z) - c_0 T(t)Z''(z) = 0. \quad (11)$$

$$m_0 \ddot{T}(t)Z(z) - Z''(z)[b_0 \dot{T}(t) + c_0 T(t)] = 0.$$

Разделим почленно это равенство на $Z(z)[b_0 \dot{T}(t) + c_0 T(t)]$:

$$m_0 \frac{\ddot{T}(t)}{[b_0 \dot{T}(t) + c_0 T(t)]} = \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -p^2. \quad (12)$$

Равенство (12) записано на основании того, что две функции различных аргументов могут быть тождественно равны только в том случае, если обе они равны одной и той же постоянной величине.

Равенству (12) соответствуют два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$Z''(z) + p^2 Z(z) = 0. \quad (13)$$

$$m_0 \ddot{T}(t) + b_0 p^2 \dot{T}(t) + c_0 p^2 T(t) = 0. \quad (14)$$

Решение уравнения (13) имеет вид:

$$Z(z) = C_1 \cos pz + C_2 \sin pz. \quad (15)$$

Это решение для модели, изображенной на рисунке 1, с учетом конкретных граничных условий рассматриваемой задачи преобразуется к виду:

$$Z(0) = 0, \quad C_1 = 0,$$

$$Z(z) = C_2 \sin pz,$$

$$Z'(l) = 0, \quad Z'(z) = C_2 p \cos pz,$$

$$\cos pl = 0,$$

$$p_1 = \frac{\pi}{2l}, \quad p_2 = \frac{3\pi}{2l}, \quad p_3 = \frac{5\pi}{2l}, \dots, \quad p_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}.$$

Таким образом, получим бесчисленное множество решений, зависящих от значений p_n .

Уравнение (14) предварительно преобразуем к виду:

$$\ddot{T}(t) + 2r_n \dot{T}(t) + k_{0n}^2 T(t) = 0, \quad (16)$$

$$\text{где } r_n = \frac{b_0 p_n^2}{2m_0}, \quad k_{0n} = p_n \sqrt{\frac{c_0}{m_0}}.$$

Решение уравнения (16) получим в виде:

$$T(t) = e^{-r_n t} (D_1 \cos k_n t + D_2 \sin k_n t), \quad (17)$$

$$\text{где } k_n = \sqrt{k_{0n}^2 - r_n^2} = p_n \sqrt{\frac{c_0}{m_0} - \frac{b_0^2 p_n^2}{4m_0^2}}.$$

В конечном счете для рассматриваемой модели решение однородного уравнения (9) получится в виде бесконечного ряда (18):

$$u(t, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin p_n z \cdot e^{-r_n t} (D_{1n} \cos k_n t + D_{2n} \sin k_n t). \quad (18)$$

К этому общему решению необходимо добавить частное решение неоднородного уравнения (8).

Определяем деформацию кипы под действием сил тяжести. Для этого из неоднородного уравнения (8) в статических условиях найдем

$$c_0 \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z^2} = m_0 g. \quad (19)$$

$$\frac{\partial u(z)}{\partial z} = \frac{m_0}{c_0} gz - \frac{m_0}{c_0} gl. \quad (20)$$

$$u(z) = \frac{1}{2} \frac{m_0}{c_0} gz^2 - \frac{m_0}{c_0} glz. \quad (21)$$

Добавив это решение к решению (18), получим общее решение неоднородного уравнения (8).

$$u(t, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin p_n z \cdot e^{-r_n t} (D_{1n} \cos k_n t + D_{2n} \sin k_n t) + \frac{1}{2} \frac{m_0}{c_0} gz^2 - \frac{m_0}{c_0} glz. \quad (22)$$

Деформацию кипы под действием усилия прессования определяем следующим образом. Из уравнения (9) в статических условиях найдем

$$\frac{\partial^2 u(z)}{\partial z^2} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial u(z)}{\partial z} = -\frac{Q}{c_0} \quad (24)$$

$$u(z) = -\frac{Q}{c_0} z. \quad (25)$$

Таким образом, начальные условия рассматриваемой задачи запишутся в следующем виде

$$u(0, z) = -\frac{Q}{c_0} z + \frac{1}{2} \frac{m_0}{c_0} g z^2 - \frac{m_0}{c_0} g l z = \frac{1}{2} \frac{m_0}{c_0} g z^2 - \left(\frac{Q}{c_0} + \frac{m_0}{c_0} g l \right) z, \quad (26)$$

$$\dot{u}(0, z) = 0.$$

Находим частное решение уравнения движения кипы с учетом начальных условий (26). Для этого в уравнении (22) воспользуемся условием ортогональности форм собственных колебаний

$$\int_0^l u(t, z) \sin p_n z dz = \frac{l}{2} e^{-r_n t} (D_{1n} \cos k_n t + D_{2n} \sin k_n t) + \int_0^l \left(\frac{1}{2} \frac{m_0}{c_0} g z^2 - \frac{m_0}{c_0} g l z \right) \sin p_n z dz \quad (27)$$

При $t = 0$ получим

$$\int_0^l \left(\frac{1}{2} \frac{m_0}{c_0} g z^2 - \frac{m_0}{c_0} g l z \right) \sin p_n z dz - \int_0^l \frac{Q}{c_0} z \sin p_n z dz = \frac{l}{2} D_{1n} + \int_0^l \left(\frac{1}{2} \frac{m_0}{c_0} g z^2 - \frac{m_0}{c_0} g l z \right) \sin p_n z dz \quad (28)$$

$$D_{1n} = -\frac{2}{l} \int_0^l \frac{Q}{c_0} z \sin p_n z dz = -\frac{2Q}{l c_0 p_n^2} (\sin p_n l - p_n l \cos p_n l) \quad (29)$$

Найдем закон изменения скоростей

$$\dot{u}(t, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin p_n z \cdot [-r_n e^{-r_n t} (D_{1n} \cos k_n t + D_{2n} \sin k_n t) + k_n e^{-r_n t} (-D_{1n} \sin k_n t + D_{2n} \cos k_n t)].$$

Для начальных скоростей имеем

$$\int_0^l \frac{\partial u(t, z)}{\partial t} \sin p_n z dz = -\frac{l}{2} r_n e^{-r_n t} (D_{1n} \cos k_n t + D_{2n} \sin k_n t) + \frac{l}{2} e^{-r_n t} k_n (-D_{1n} \sin k_n t + D_{2n} \cos k_n t),$$

и при $t = 0$ получим

$$0 = -\frac{l}{2} r_n D_{1n} + \frac{l}{2} k_n D_{2n}, \quad (30)$$

$$D_{2n} = \frac{r_n}{k_n} D_{1n} = -\frac{r_n}{k_n} \frac{2Q}{l c_0 p_n^2} (\sin p_n l - p_n l \cos p_n l)$$

С учетом найденных значений $D_{1,n}$, $D_{2,n}$ окончательно получим

$$u(t, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin p_n z \cdot e^{-r_n t} (D_{1n} \cos k_n t + D_{2n} \sin k_n t) + \frac{1}{2} \frac{m_0}{c_0} g z^2 - \frac{m_0}{c_0} g l z. \quad (31)$$

Часто приходится выполнять нахождение приближенного решения уравнения движения кипы. Равенство (31) дает точное решение уравнения движения кипы, однако, из практических соображений известно, что в реальных условиях движение кипы затухает примерно через четверть периода колебаний на основной частоте, что позволяет ограничиться одним членом разложения (31), а вместо теоретической формы колебаний использовать уравнение начальной деформации

$$u(0, z) = \frac{1}{2} \frac{m_0}{c_0} g z^2 - \frac{1}{c_0} z(Q + m_0 g l).$$

$$u(t, z) = \left[\frac{1}{2} \frac{m_0}{c_0} g z^2 - \frac{1}{c_0} z(Q + m_0 g l) \right] e^{-rt} (D_1 \cos kt + D_2 \sin kt)$$

$$D_1 = 1.$$

$$\frac{\partial u(t, z)}{\partial t} = \left[\frac{1}{2} \frac{m_0}{c_0} g z^2 - \frac{1}{c_0} z(Q + m_0 g l) \right] [-r e^{-rt} (D_1 \cos kt + D_2 \sin kt) + e^{-rt} k (D_1 \sin kt + D_2 \cos kt)]$$

$$[-r + k D_2] = 0,$$

$$D_2 = \frac{r}{k}.$$

$$\text{где } r = \frac{b_0 p^2}{2m_0}, \quad k = p \sqrt{\frac{c_0}{m_0}}, \quad r = r_1, \quad p = p_1.$$

$$\text{где } k = \sqrt{k_0^2 - r^2} = p \sqrt{\frac{c_0}{m_0} - \frac{b_0^2 p^2}{4m_0^2}}.$$

По приближенной зависимости была разработана программа, с помощью которой построены графики перемещений и скорости верхнего сечения кипы после снятия упаковки.

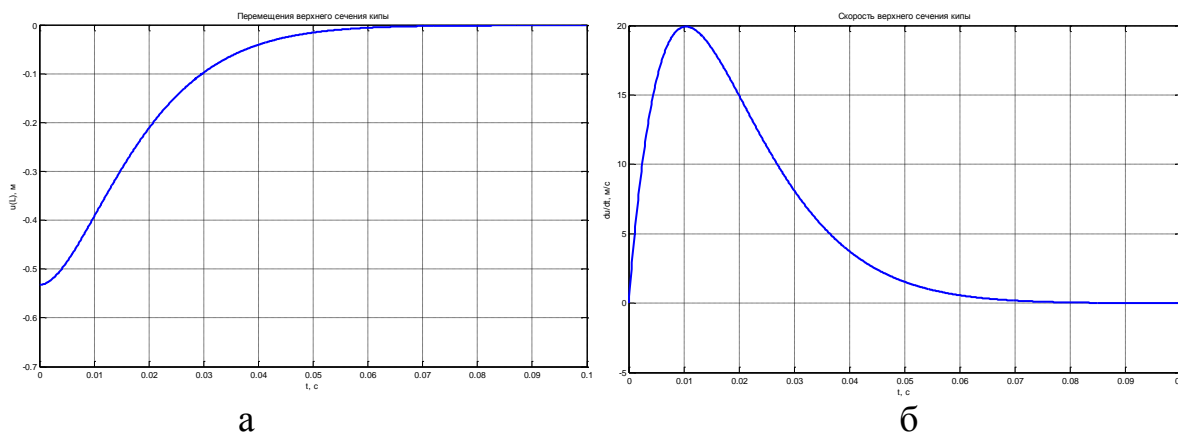


Рисунок 2. Графики перемещения (а) и скорости (б) верхнего сечения кипы после снятия упаковки

Выводы

1. Предложена механическая модель кипы хлопка.
2. Составлена математическая модель деформационного движения кипы.
3. Приведено общее и частное решение уравнений движения кипы.
4. Обосновано применение приближенного решения уравнения движения кипы.

Список литературы

1. Волков В.В., Семёнов А.Д. и др. Влияние физико-механических свойств ставки кип на внешнюю неровноту её переработки. Изв. ВУЗов. Технология текстильной промышленности. 2009. - №1. – С.48-51.
2. Севостьянов А.Г. Методы и средства исследования механико-технологических процессов текстильной промышленности. учебник для вузов. 2-е изд., допол. и перераб. – 2007 г.
3. Труевцев Н.И. и др. Механическая технология волокнистых материалов. Изд. «Легкая индустрия». – 1999 г.