

## Отзыв

официального оппонента

на диссертационную работу Ерохина Сергея Владимировича на тему:

«Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния вязкоупругих тел с использованием методов дробного исчисления», представленную на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.13.18 - «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» в диссертационный совет Д 212.337.01, при ФГБОУ ВО «Пензенский государственный технологический университет»

### **Актуальность работы.**

Многие важные достижения классической механики твердого тела основаны на линейных представлениях теории упругости, которая в математическом отношении сводится к анализу линейных модельных дифференциальных уравнений. Для решения многих практических задач указанный подход дает достаточную степень точности и находит широкое применение. Но вместе с тем, как показывают результаты комплексного экспериментально-теоретического анализа, многие нелинейные особенности статики и динамики напряженно-деформированного состояния вязкоупругих материалов не укладываются в рамки хорошо изученных классических моделей механики сплошных сред. Физическая неоднородность вязкоупругих материалов и возможность развития геометрически нелинейных деформаций вязкоупругих элементов конструкций в условиях квазистатического равновесия обуславливают необходимость построения качественно новых, более адекватных математических моделей деформирования упругих тел.

Одно из современных направлений развития методов математического моделирования нелинейной вязкоупругих тел, существенно расширяющих возможности качественного понимания и количественного описания эволюции процессов деформируемой среды, связано с использованием формализма дроб-

ного интегро-дифференциального исчисления. Идеология использования теории дробного исчисления при решении проблем нелинейной динамики твердого тела вытекает из глубоких статистических и физико-механических соображений, и в математическом отношении сводится к поиску численно-аналитических решений дифференциальных уравнений с производными дробного порядка по времени или пространственным переменным.

Дробно-дифференциальный подход в моделировании, открывающий принципиально новые возможности для изучения состояния реальных нелинейных вязкоупругих материалов наследственного типа, физико-механические свойства которых изменяются во времени и определяются историей деформирования, позволяет более глубоко осмыслить известные результаты исследований механических процессов и явлений в природных неоднородных структурах. Однако, исследование разрешимости задач для уравнений с дифференциальным оператором дробного порядка сопряжено с довольно серьезными математическими сложностями, не позволяющих применять для их исследования известную теорию дифференциальных уравнений. В настоящее время, несмотря на то, что этому вопросу посвящено немало интересных работ законченной теории и общих методов исследования применения дробного исчисления не существует.

Актуальность темы диссертационного исследования определяется недостаточной изученностью теоретического обоснования применения методов дробного интегро-дифференциального исчисления при математическом моделировании напряженно-деформированного состояния вязкоупругих материалов, а также недостаточностью разработкой методов исследования задач для модельных уравнений с дробными производными.

Представленная диссертационная работа С.В. Ерохина выполнена в указанном направлении и посвящена актуальным проблемам теоретического обоснования применения методов дробного интегро-дифференциального исчисления при математическом моделировании напряженно-деформированного состояния, учитывающих нелинейные свойства вязкоупругих материалов, а

также недостаточно хорошо изученным вопросам разрешимости задач параметрической идентификации дробных моделей.

В этой связи в диссертации предложен и реализован метод математического моделирования деформированного состояния вязкоупругих материалов с применения производных дробного порядка, учитывающих нелинейные свойства материалов при длительных квазистатических и динамических нагрузках. С этой точки зрения, разработанные и апробированные автором эффективные, компьютерно реализуемые, алгоритмы численно-аналитических методов решения модельных уравнений с дробными уравнениями, являются актуальным направлением научного исследования обусловленные необходимостью выявления, анализа и решения проблем, возникающих при решении практической задачи направленного синтеза полимерных материалов с заданными механическими свойствами.

**Обоснованность и достоверность научных положений, выводов и рекомендаций.**

Обоснованность научных положений, выводов и рекомендаций, содержащихся в диссертации С.В. Ерохина, определяется грамотным применением комплекса таких методов как метод математического моделирования, статистический анализ, сравнительный анализ, расчетно-аналитический подход, а также использование в качестве теоретической и методической основы диссертации фундаментальных исследований и прикладных работ ведущих ученых в области применения теории дробного исчисления.

Достоверность результатов исследования обеспечивается сопоставлением в соответствии с заданным критерием полученных численно-аналитических результатов с экспериментальными данными и численными значениями, полученных по более сложным номографическим методикам, апробацией результатов исследования на научно-практических конференциях, отражением основных результатов диссертационной работы в опубликованных автором научных трудах.

Результаты диссертационного исследования, его основные положения, идеи и выводы нашли отражение в одиннадцати научных работах, в том числе четыре статьи в научных изданиях рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Министерства образования и двух свидетельствах о регистрации программ для ЭВМ в Отраслевом фонде электронных ресурсов «Наука и образование» (ОФЭРНиО).

#### **Анализ содержания работы.**

Диссертационная работа изложена на 128 страницах машинописного текста. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и приложения. Список использованной литературы включает 112 наименований работ отечественных и зарубежных авторов. Автореферат содержит 21 страницу. Материалы, изложенные в автореферате достаточно полно отражают содержание диссертации.

**Во введении** описаны, согласно принятой структуре, актуальность темы диссертационной работы, ее цель, задачи, приведена постановка проблемы, освещается общее состояние вопроса по рассматриваемому направлению, в компактной форме сформулированы и обоснованы основные результаты научного исследования.

**В первой главе** приводятся основные теоретические сведения теории дробного исчисления, используемые в дальнейшем в работе. В частности, даны различные определения производных и интегралов дробного порядка и сформулированы их основные свойства. Выявлены некоторые общие аспекты применения формализма дробного интегро-дифференцирования в решении прикладных задач механики сплошных сред. Уточнена роль теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения дробного порядка в решении проблем параметрической идентификации.

**Вторая глава**, состоящая из трех параграфов, посвящена исследованию задачи о движения одномерного осциллятора с вязкоупругим демпфированием, которая возникает в связи с решением проблем повышения точности прогноз-

ных оценок прочности и надежности конструкций под действием вибрационных нагрузок.

Для изучения колебательного движения осциллятора с вязкоупругим демпфированием разработана специальная математическая модель с дробной производной, названная фрактальным осциллятором. Отличительной особенностью дробной модели является то, что она, являясь обобщением модели классического гармонического осциллятора, позволяет также учитывать нелинейные свойства деформации вязкоупругих элементов конструкций при длительных квазистатических и динамических нагрузках. Особое внимание обращено на то, что точность прогнозных оценок обеспечивается заданием порядка дробной производной математической модели фрактального осциллятора.

Важным результатом этой главы следует считать теоретически установленные для данного метода моделирования основные осцилляционные свойства материалов с вязкоупругим демпфированием для соответствующей задачи Штурма-Лиувилля модели с дробной производной, а также явные аналитические выражения для определения собственных значений и собственных функций. Особого внимания заслуживают, важные с практической точки зрения, строгие теоретические оценки первого собственного числа математической модели с дробной производной.

Рассмотрены примеры, демонстрирующие потенциальные возможности механико-математической модели дробного порядка с вязким демпфированием. В частности, автором данный метод моделирования использовался для прогнозирования срока службы дорожных покрытий из полимербетона.

**В третьей главе,** применительно к решению проблемы создания вязкоупругих материалов с заданными механическими свойствами и параметрами деформирования элементов конструкций, предложен и реализован общий подход применения дробных производных в методах математического моделирования напряженно-деформированного состояния конструкций, учитывающих влияние нелинейных свойств деформирования вязкоупругих материалов.



Основная идея предложенного метода моделирования, заключается в строгом теоретическом обосновании математического способа описания нелинейного механизма взаимодействия между напряженным и деформированным состоянием вязкоупругих материалов при помощи оператора дробного дифференцирования. Сделан вывод, что порядок дробной производной в определяющем соотношении напряженно-деформированного состояния является характеристикой неоднородной структуры вязкого и упругого элементов механических свойств материала.

Особый научный интерес представляет, предложенный диссертантом новый подход в решении весьма важных для практики, но недостаточно хорошо изученных задач идентификации параметров дробной модели. В рамках предложенного подхода параметрической идентификации, разработана методика определения параметров двухпараметрического дробного определяющего соотношения между напряженным и деформированным состоянием, позволяющая находить неизвестный параметр, если известна точка вынужденной эластичности еще два результата измерений.

В частности, по предложенной методике идентификации, на основе трех известных значений экспериментальных данных в соответствии с заданным критерием, найдены значения параметров дробной модели для образцов полимерных пленок из 5 различных материалов (тетрахлордиан, фенилфталеин, 1,1-дихлор-2,2-диэтилен, диан, диоксидифенилсульфон). Показано, что значения параметров, вычисленные более простым аналитическим способом, хорошо согласуются с их значениями, полученными по более сложным номографическим методикам. На основе сравнительного анализа сделан вывод, что параметры зависят только от свойств материала и инвариантны к функциям нагрузки и деформирования.

Эффективность разработанной методики идентификации параметров при заданной структуре основополагающего соотношения дробным уравнением, определяется тем, что она дает возможность проводить гибкий вычис-

лительный эксперимент, в частности оперативно менять области наилучших решений, компенсируя тем самым недостаточность априорной информации.

Далее, предложенная автором методология решения задачи параметрической идентификации, рассмотрена применительно к методам математического моделирования процессов ползучести и релаксации в вязкоупругих материалах, когда в качестве определяющего соотношения вязкоупругих материалов выступает дробно-экспоненциальная функция Работнова. Важным научным результатом является полученный, используя методы теории дробного исчисления, численно-аналитический алгоритм решения задачи параметрической идентификации для дробной математической модели Работнова, позволяющего строить долгосрочные прогнозы ползучести и релаксации изучаемых материалов по результатам трех экспериментальных измерений.

Для апробации численно-аналитического алгоритма разработанной методики обработаны экспериментальные данные ползучести образцов тканевого стеклопластика. Эффективность предложенной методики параметрической идентификации подтверждена вполне удовлетворительными результатами сравнения экспериментальных данных с параметрами, найденными по предложенной методике. Результаты решения представлены в форме диаграмм деформирования для различных степеней дробных производных. Полученные результаты демонстрируют влияние значений порядка дробных производных на вид диаграммы деформирования.

**В четвертой главе** разработаны численные методы решения дифференциальных уравнений с производными дробного порядка, которые сопутствуют практическому использованию соответствующих методов моделирования. Для их численного решения предложены разностные схемы, в которых дробная производная аппроксимируется выражением со степенной сеточной функцией. В работе решены модельные задачи, на примере которых продемонстрирована эффективность численных методов.

Для численного решения задачи Штурма-Лиувилля разработана разностная схема, сформулирован и доказан критерий устойчивости вычислительного процесса.

Приведено описание и алгоритмы работы программного комплекса, в котором реализованы алгоритмы параметрической идентификации моделей вязкоупругих материалов и вычисления собственных значений и функций уравнения осциллятора с вязкоупругим демпфированием.

**Достоверность результатов** и адекватность математического моделирования обеспечивается строгими математическими доказательствами, вычислительными экспериментами и в некоторых случаях предельными переходами к эталонным вариантам, сравнением с данными экспериментов, а также натуральных наблюдений.

**Научная новизна работы** заключается в достижении следующих обобщенных и достоверных результатов:

- разработаны методики параметрической идентификации моделирующих соотношений вязкоупругого тела, содержащих оператор дробного дифференцирования;
- разработаны и апробированы разностные схемы численного решения уравнений с производными дробного порядка;
- проведен анализ математического моделирования осциллятора с вязкоупругим демпфированием, установлены важные осцилляционные свойства, получены аналитические выражения и представлены в явном виде системы собственных значений и собственных функций;
- создан авторский набор программ, реализующий разработанные алгоритмы параметрической идентификации и численные методы решения уравнения осциллятора с вязкоупругим демпфированием.



### **Практическая значимость работы.**

Разработанные методики параметрической идентификации при заданной структуре основополагающего соотношения механики дробным уравнением могут найти практическое применение в инженерной практике для прогнозирования напряженно-деформированного состояния полимеров, бетонов, грунтов и других материалов.

Особую практическую ценность представляет апробация авторского метода расчета характеристик полимеров, полученных методом направленного синтеза в Научном центре "Новейшие материалы и технологии".

### **Замечания по диссертационной работе.**

1. Некоторые графические материалы выполнены недостаточно аккуратно (рис. 3.7, 3.14). Не везде присутствует единый стиль оформления графиков.

2. При описании методик параметрической идентификации модели вязкоупругого материала (п. 3.3) недостаточно внимания уделено вопросам устойчивости расчетов и зависимости полученных результатов от ошибок экспериментальных данных.

3. При всей значительности результатов исследования осциллятора с вязкоупругим демпфированием следует уделить больше внимания практическим приложениям данного моделирования.



Следует отметить, что указанные замечания не снижают общей научной и практической ценности работы, которая содержит практически значимые методические разработки в рамках заявленной темы.

### **Заключение.**

Диссертационное исследование Ерохина С.В. является законченной научно квалификационной работой, в которой содержатся решения актуальных задач параметрической идентификации моделей вязкоупругих материалов и исследования модели осциллятора с вязкоупругим демпфированием, имеющих существенное значение для развития соответствующих областей математического моделирования.

Автореферат в полной мере отражает основные положения диссертационного исследования, его содержание соответствует тексту диссертации и указанным публикациям. Представленная диссертационная работа соответствует области исследований 05.13.18-«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» паспорта научных специальностей.

Таким образом, диссертация на тему «Математическое моделирование напряженно- деформированного состояния вязкоупругих тел с использованием методов дробного исчисления» отвечает требованиям, установленным Положением о присуждении ученых степеней, утвержденных постановлением Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 года, № 842 с изменениями постановления Правительства Российской Федерации от 21 апреля 2016 г. № 355 (пп. 9, 10, 11, 13, 14), а ее автор, Ерохин Сергей Владимирович заслуживает присуждения ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.13.18 - «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

  
Подпись:   
Начальник отдела кадров  
Государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ставропольский государственный педагогический институт»



Сербина Людмила Ивановна, доктор физико-математических наук, профессор, почетный работник ВО РФ, профессор кафедры математики и информатики, ГБОУ ВО «Ставропольский государственный педагогический институт»

**Контактная информация:**

Сербина Людмила Ивановна, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики и информатики ГБОУ ВО «Ставропольский государственный педагогический институт»; 355029, Российская Федерация, Ставрополь, ул. Ленина, 417 «А».

тел. раб.: 8(8652) 56- 08-26; моб.: 8(918) 870-16-32

E-mail: [lserbina@mail.ru](mailto:lserbina@mail.ru); [mail@sspi.ru](mailto:mail@sspi.ru); официальный сайт организации: [www.sspi.ru](http://www.sspi.ru)

Подпись  
удостоверяю  
проректор по научно-исследовательской работе и инновациям.

Людмилы Ивановны Сербиной  
Фокин А.А., доктор филологических наук, доцент,



27.11.2016 г.