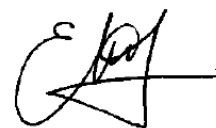


На правах рукописи



ЕРОХИН Сергей Владимирович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
МЕТОДОВ ДРОБНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ**

**Специальность 05.13.18 – математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ**

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Пенза – 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» на кафедре «Прикладная математика».

Научный руководитель – доктор физико-математических наук

Алероев Темирхан Султанович.

Официальные оппоненты: **Седельников Андрей Валерьевич,**

доктор технических наук, доцент, ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева», доцент кафедры «Космическое машиностроение»;

Сербина Людмила Ивановна,

доктор физико-математических наук, профессор, ГБОУ ВО «Ставропольский государственный педагогический институт», профессор кафедры «Математика и информатика».

Ведущая организация – ФГУ «Федеральный исследовательский центр

Институт прикладной математики им.

М.В. Келдыша Российской академии наук»,

г. Москва.

Защита состоится 27 декабря 2016 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 212.337.01 на базе ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный технологический университет», по адресу: 440039, г. Пенза, пр. Байдукова / ул. Гагарина, д. 1а/11, корпус 1, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Пензенский государственный технологический университет» и на сайте www.penzgtu.ru.

Автореферат разослан 16 ноября 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Чулков Валерий Александрович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы.

Развитие современной техники и технологий создания материалов опирается на исследования конструкций и материалов, способных эффективно работать в упругой или вязкоупругой областях при действии сложных нагрузок. Широкое распространение получил направленный синтез материалов с заданными свойствами – огнестойкостью, высокой прочностью и пластичностью.

Проектирование и использование таких материалов в различных областях техники трудно представить без предварительного *математического моделирования их напряженно-деформированного состояния* (НДС) и оценки адекватности применяемых моделей и методов моделирования физических процессов с учетом имеющихся экспериментальных данных. Так, для полимерных материалов диаграмма растяжения включает не только линейный участок незначительной протяженности, но и характерный при больших деформациях участок нелинейной зависимости.

Стандартные подходы к математическому моделированию вязкоупругих материалов с использованием производных целого порядка не демонстрируют полного соответствия экспериментальным результатам. Необходимость применения адекватных математических методов, способных с высокой точностью описать и спрогнозировать параметры исследуемых процессов, обусловило повышение внимания к разработке математических методов моделирования напряженно-деформированного состояния вязкоупругих материалов с применением *производных дробного порядка*.

Помимо разработки адекватных математических методов моделирования напряженно-деформированного состояния возникает не менее важная задача параметрической идентификации моделирующих соотношений с производными дробного порядка, а также разработки методики идентификации параметров этих соотношений по экспериментальным данным. Значения этих параметров, особенно порядка дробной производной, играют ключевую роль в прогнозировании поведения систем с вязкоупругими элементами, а также в принятии решений о выборе тех или иных материалов для различных целей.

С практической точки зрения актуальным является моделирование систем с вязкоупругими элементами в условиях периодических нагрузок (автомобильные и железные дороги, сейсмическая защита зданий и др.). Для решения этой задачи необходимы математические методы, позволяющие выполнять математическое моделирование напряженно-деформированного состояния вязкоупругих материалов и учитывающие их осцилляционные свойства с вязкоупругим демпфированием.

Математическое моделирование с использованием дробного исчисления приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений с производными дробного порядка. Аналитическое решение таких задач зачастую оказывается очень сложным или даже невозможным, поэтому актуальной является разработка эффективных численных методов и программных продуктов.

Степень разработанности темы исследования. Математическим моделированием вязкоупругих тел с использованием дробного анализа занимались многие отечественные (Герасимов А.Н., Слонимский Г.Л., Нахушев А.М., Сургуладзе Т.А., Огородников Е.Н., Победря Б.Е., Алероев Т.С. и др.) и зарубежные (Gement A., Scott-Blair G.W., Caputo M., Bagley R.L., Torvik P.J., Ingman D., Suldalnitsky J., Naber M. и др.) ученые. Однако, при всем разнообразии подходов исследования, задачам параметрической идентификации уделяется значительно меньше внимания. Также имеется много нерешенных задач в области аналитического исследования модели осциллятора с вязкоупругим демпфированием.

Цель работы – развитие методов математического моделирования напряженно-деформированного состояния вязкоупругих материалов на основе аппарата дробного исчисления, разработка новых численных алгоритмов параметрической идентификации моделей и численных методов решения дифференциальных уравнений с производными дробного порядка с дальнейшей реализацией в виде программных продуктов.

Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие **задачи**.

1. Разработка методов математического моделирования напряженно-деформированного состояния вязкоупругих материалов на основе аппарата дробного исчисления.

2. Разработка алгоритмов параметрической идентификации и оценка адекватности математических моделей напряженно-деформированного состояния вязкоупругих материалов с применением аппарата дробного исчисления.

3. Оценка адекватности и исследование математической модели осциллятора с вязкоупругим демпфированием, позволяющее получить аналитические выражения для системы собственных значений и собственных функций и теоретические оценки для первого собственного числа задачи Штурма-Лиувилля.

4. Разработка и верификация новых численных методов решения уравнений с производными дробного порядка, возникающих в процессе математического моделирования напряженно-деформированного состояния вязкоупругих материалов.

5. Разработка программ, реализующих алгоритмы параметрической идентификации моделирующих соотношений, содержащие производные дробного порядка, а также численные методы решения уравнений с производными дробного порядка.

Объект исследования: напряженно-деформированное состояние вязкоупругих материалов.

Предмет исследования: математические методы моделирования, численные методы моделирования осциллятора с вязкоупругим демпфированием и методики параметрической идентификации моделирующих соотношений напряженно-деформированного состояния вязкоупругих материалов с применением аппарата дробного исчисления.

Методология и методы исследования. Для решения поставленных задач используются базовые методы математического моделирования и вычислительного эксперимента как двуединого процесса создания и исследования ма-

тематических моделей. Результаты получены с использованием теории дробного исчисления, интегральных уравнений, а также теории разностных схем.

Научная новизна.

1. Разработан метод математического моделирования напряженно-деформированного состояния вязкоупругих материалов, включающий в себя алгоритм параметрической идентификации моделей дробного исчисления, позволяющий определять порядок оператора дробного дифференцирования как критерий эффективности направленного синтеза.

2. Разработаны новые алгоритмы параметрической идентификации моделирующих соотношений, содержащих оператор дробного дифференцирования, позволяющие получить значения ключевых вязкоупругих параметров полимерных материалов, необходимых для прогнозирования их поведения в условиях длительных нагрузок.

3. Установлена адекватность математического моделирования осциллятора с вязкоупругим демпфированием как метода моделирования напряженно-деформированного состояния вязкоупругих материалов, получены аналитические выражения для собственных значений и собственных функций, что позволяет строить адекватные прогнозы поведения осциллирующих систем.

4. Разработаны новые численные методы решения уравнений с производными дробного порядка, построены алгоритмы численного определения собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля для уравнения осциллятора с вязкоупругим демпфированием, определен критерий сходимости вычислительного процесса, что позволяет осуществить численное моделирование напряженно-деформированного состояния вязкоупругих материалов с учетом экспериментальных данных.

5. Созданы программы, реализующие алгоритмы параметрической идентификации напряженно-деформированного состояния вязкоупругих материалов с вычислением производных дробного порядка, обеспечивающие численные расчеты собственных значений и собственных функций уравнения осциллятора с вязкоупругим демпфированием, что необходимо для создания эффективной технологии синтеза вязкоупругих материалов.

Практическая значимость. Применение представленных в диссертационной работе результатов исследований, а также программных продуктов, реализующих численные алгоритмы параметрической идентификации, позволяет при направленном синтезе создать материалы с требуемыми характеристиками.

Внедрение результатов исследования. Разработанные численные методы и алгоритмы параметрической идентификации применялись при расчете характеристик полимеров, полученных методом направленного синтеза в Научном центре "Новейшие материалы и технологии". Использование материалов диссертации подтверждено соответствующими актами и справками.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора. Численные методы и алгоритмы параметрической идентификации моделей с производными дробного порядка опубликованы в работах [5-8] и разработаны автором самостоятельно. Результаты математического моделирования осциллятора с вязкоупругим демп-

фированием [1-4, 9]: формулы для собственных функций и собственных значений, основные осцилляционные свойства модели, оценки для первого собственного числа и разностные схемы получены автором самостоятельно.

На защиту выносятся следующие основные результаты.

1. Метод математического моделирования напряженно-деформированного состояния вязкоупругих материалов на основе экспериментальных данных, включающий в себя алгоритм параметрической идентификации моделей дробного исчисления, позволяющий определять оператор дробного дифференцирования.

2. Вычислительные алгоритмы параметрической идентификации моделирующих соотношений, содержащих оператор дробного дифференцирования, позволяющие получить значения ключевых вязкоупругих параметров полимерных материалов.

3. Метод математического моделирования осциллятора с вязкоупругим демпфированием как метод моделирования напряженно-деформированного состояния вязкоупругих материалов: формулы для собственных частот и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля, оценки для первой собственной частоты.

4. Численные методы, разностные схемы и вычислительные алгоритмы для решения уравнений с производными дробного порядка, возникающих при математическом моделировании напряженно-деформированного состояния вязкоупругих материалов.

5. Комплекс программ, реализующих алгоритмы параметрической идентификации моделирующих соотношений, содержащих производные дробного порядка, а также численные методы определения собственных значений и собственных функций уравнения осциллятора с вязкоупругим демпфированием.

Соответствие паспорту научной специальности. Область исследования соответствует паспорту специальности 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ по пунктам: 1 – «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений»; 2 – «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей»; 4 – «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента»; 6 – «Разработка новых математических методов и алгоритмов проверки адекватности математических моделей объектов на основе данных натурного эксперимента».

Достоверность результатов обеспечивается использованием современных методов математического моделирования, вычислительными экспериментами и в некоторых случаях предельными переходами к эталонным вариантам, совпадением теоретических результатов с данными компьютерных и натуральных экспериментов.

Апробация работы. Материалы диссертации и отдельные ее вопросы докладывались автором и обсуждались на семинарах кафедр высшей математики, прикладной математики и строительной механики НИУ МГСУ и конференциях, в том числе: Всероссийская научно-практическая конференция «Математи-

ка, информатика, естествознание в экономике и в обществе», МФЮА, 2007; Международный Российско-Азербайджанском симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики», 2008; Международная конференция «Дифференциальные уравнения и топология», МГУ, 2008; Международная научно-практическая конференция «Инженерные системы – 2010», РУДН; XIII Всероссийская научно-практическая конференция «Современная строительная наука и образование», НИУ МГСУ, 2016.

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 11 печатных работах, среди них 4 – в изданиях перечня ВАК и 2 свидетельства на программу для электронных вычислительных машин.

Структура и объем работы. Диссертационная работа изложена на 128 страницах машинописного текста, содержит 33 рисунка и 6 таблиц. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и приложения. Список использованной литературы включает 113 наименований работ отечественных и зарубежных авторов.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении показана актуальность и сформулированы основные проблемы, цели и задачи исследования. Перечислены основные научные и практические результаты.

В первой главе приводятся обзор и основные понятия теории дробного интегро-дифференцирования, применяемые в работе. В частности, приводится регуляризованная дробная производная

$$D_*^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^x \frac{f^{(m)}(\tau) d\tau}{(x - \tau)^{\alpha+1-m}}, \quad (1)$$

и рассмотрены основные ее свойства.

Проведен обзор основных математических методов моделирования НДС вязкоупругих материалов. По экспериментальным данным установлено, что методы моделирования с использованием стандартных производных не могут считаться адекватными.

Во второй главе проведен анализ метода математического моделирования движения одномерного осциллятора с вязкоупругим демпфированием (рисунок 1) и доказана адекватность математического моделирования осциллятора с вязкоупругим демпфированием как метода моделирования НДС вязкоупругих материалов.

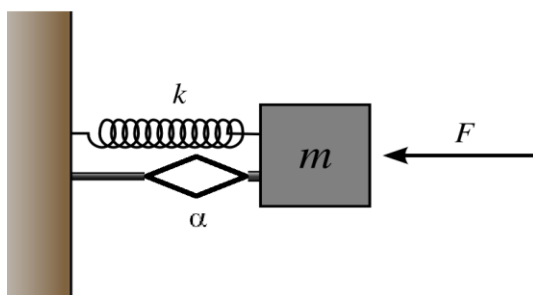


Рисунок 1 – Осциллятор с вязкоупругим демпфированием

Стандартное уравнение для осциллятора с демпфером

$$mu'' + \eta u' + ku = F(x) \quad (2)$$

широко используется при моделировании различных объектов и систем, расчетах устойчивости конструкций при вибрационных нагрузках, сейсмической защите зданий и др. Осциллятор с вязкоупругим демпфером является обобщением стандартного осциллятора и позволяет лучше учитывать механические свойства демпфирующих элементов за счет введения дополнительного параметра - порядка производной.

В общем виде движение осциллятора на пружине с вязкоупругим демпфером, находящей под воздействием внешней силы, описывается соотношением

$$tu'' + \eta D^\alpha u + ku = F(x), \quad (3)$$

где m – масса осциллятора; η , α – параметры демпфера, k – жесткость пружины, $F(x)$ – внешняя сила, D^α – регуляризованная дробная производная (1).

Данная схема была использована при моделировании изменения деформационно-прочностных характеристик полимербетона при нагружении. Исследовались образцы полимербетона на основе полиэфирной смолы (диан и дихлоангидрид – 1,1 – дихлор – 2,2 – диэтилен). Полимербетон представляется как набор гранул минерального наполнителя, находящихся в вязкоупругой среде, что соответствует схеме на рисунке 1. В этом случае движение гранулы описывается уравнением (3), где m – масса гранулы; η – модуль вязкости смолы, k – модуль жесткости смолы, α – параметр вязкоупругости среды, $F(x)$ – внешняя сила.

В работе проводится анализ результатов моделирования (один из основных этапов математического моделирования) аналитическими средствами, впервые установлены основные осцилляционные свойства, что подтверждает адекватность моделирования.

Для исследования задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{aligned} u'' + cD_{0x}^\alpha u + \lambda u &= 0, \\ u(0) = 0, \quad u(1) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где D_{0x}^α – оператор дробного интегриродифференцирования от 0 до x порядка $\alpha \in [0,1]$, рассматривается вспомогательная задача Коши:

$$\begin{aligned} u'' + cD_{0x}^\alpha u + \lambda u &= 0 \\ u(0) = 0, \quad u'(0) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

С использованием метода резольвент и теории интегральных уравнений Вольтерра, решение (5) выписывается в явном виде

$$u(x, \lambda) = x - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-1)^{n+1} \frac{C_n^m c^m \lambda^{n-m}}{\Gamma(2n - m\alpha + 2)} x^{2n+1-m\alpha}, \quad (6)$$

при этом собственные функции задачи (4) имеют вид:

$$\chi_i(x, \lambda) = x - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-1)^{n+1} \frac{C_n^m c^m \lambda_i^{n-m}}{\Gamma(2n - m\alpha + 2)} x^{2n+1-m\alpha}, \quad (7)$$

где λ_i – корни функции $\omega(\lambda) = u(1, \lambda)$.

Построенная система функций (7) является полной, но не ортогональной, поэтому рассматривается сопряженная задача

$$\begin{aligned} u'' + cD_{x_1}^\alpha u + \bar{\lambda}u &= 0 \\ u(0) = 0, \quad u(1) &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $D_{x_1}^\alpha$ – оператор дробного интегриродифференцирования от x до 1 порядка $\alpha \in [0,1]$.

Для нее аналогичным образом установлено, что число λ является собственным значением задачи (8) тогда и только тогда, когда λ является корнем функции $\omega(\lambda)$.

Собственные функции задачи (8) имеют вид

$$\chi_i(x, \lambda) = 1 - x + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-1)^{n+1} \frac{C_n^m c^m \lambda_i^{n-m}}{\Gamma(2n - m\alpha)} (1 - x)^{2n+1-m\alpha}, \quad (9)$$

где λ_i – корни функции $\omega(\lambda)$.

Системы собственных функций (7) и (9) биортогональны.

Используя теорию возмущений линейных операторов, установлены основные осцилляционные свойства, необходимые для обоснования адекватности моделирования:

– все решения уравнения $\omega(\lambda) = 0$ являются простыми, действительными и положительными;

– первая собственная функция задачи (4) не обращается в нуль на интервале $(0, 1)$.

Получены наиболее важные с практической точки зрения оценки первого собственного значения уравнения осциллятора с вязкоупругим демпфированием.

Для оценки первого собственного значения используется формула

$$\sigma_1^{-1} < \lambda_1 < \sigma_1/\sigma_2 \quad (10)$$

где значения σ_i можно найти из формул

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{S_1(1)}{S_0(1)}, \\ \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2) &= \frac{S_2(1)}{S_0(1)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Для функций $S_i(x)$ имеют место интегральные уравнения:

$$\begin{aligned} S_0(x) &= x + \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} S_0(t) dt \\ S_1(x) &= -\int_0^x (x-t) S_0(t) dt + \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} S_1(t) dt \\ S_2(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} S_2(t) dt - \int_0^x (x-t) S_1(t) dt \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, для получения численных оценок (10), необходимо решить уравнения (12) и вычислить $S_0(1)$, $S_1(1)$, $S_2(1)$. Эти значения вычислены при $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$S_0(1) = 1,346; \quad S_1(1) = -0,186; \quad S_2(1) = 0,0078, \quad (13)$$

откуда, при подстановке в (11) получены оценки для первого собственного числа задачи (4)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &> \sigma_1^{-1} = 7,256 \\ \lambda_1 &< \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 14,124 \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнение $\omega(\lambda) = 0$ допускает численное решение $\lambda_1 \approx 9,37$, что соответствует оценке (14).

Третья глава посвящена математическому моделированию вязкоупругих материалов с применением производных дробного порядка. Разработаны методики параметрической идентификации моделирующих соотношений по экспериментальным данным.

Исследуется НДС полиэфиров, полученных направленным синтезом полимеров с требуемыми свойствами, характеризуются высокой эластичностью (эластомеры), т.е. способностью к большим обратимым деформациям (у лучших образцов она может достигать 500 %). На их основе изготавливают клеи и мастики, а также герметизирующие материалы.

В общем виде моделирующее соотношение НДС вязкоупругого элемента конструкции, содержащее производные дробного порядка, имеет вид:

$$\sigma(t) + \sum_{i=1}^m b_i D^{\alpha_i} \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{j=1}^m E_j D^{\beta_j} \varepsilon(t), \quad (15)$$

где $\sigma(t)$, $\varepsilon(t)$ – напряжение и деформация в момент времени t , $b_i, E_j, \alpha_i, \beta_j$ – параметры модели, а D^β – дробная производная Капуто (1).

Для описания физических соотношений многих вязкоупругих материалов можно ограничиться соотношением вида

$$\sigma(t) = E_1 D^\beta \varepsilon(t). \quad (16)$$

Параметры вязкоупругой среды имеют промежуточное положение между параметрами вязкой неупругой среды ($\beta = 1$) и абсолютно упругой невязкой ($\beta = 0$) среды, т. е. параметр β является характеристикой механических свойств материала.

В общем случае для малых деформаций справедлив закон Гука. После точки вынужденной эластичности ε_B поведение образца описывает соотношение с производными дробного порядка (16). Если образец не обладает мгновенной упругостью, что справедливо для многих полимеров, то это соотношение описывает его напряженно-деформированное состояние на всем участке.

На рисунке 2 и в таблице 1 дано сопоставление экспериментальных данных и модельных кривых для физических соотношений образцов тетрахлордиана (ТХД) в области высокоэластичной деформации.

Механические свойства изучались при трехточечном изгибе на образцах цилиндрической формы диаметром 4,5 мм с базовой длиной 30 см. Испытания выполнены при температуре 293 К с постоянной скоростью деформации 5 мм/мин.

Метод математического моделирования с производной дробного порядка (16) успешно проходит проверку адекватности по критерию Фишера при уровне значимости $\alpha = 0,05$:

$$F_3 = \frac{S_2^2}{S_1^2} = 1,53 \leq F_T(8,6) = 4,15.$$

Стандартные методы моделирования не удовлетворяют данному критерию, а следовательно, не могут считаться адекватными.

Таблица 1 – Сопоставление экспериментальных данных и результатов математического моделирования для ТХД

Деформация (ϵ), м	Напряжение (σ), МПа			
	Эксперимент	Моделирование с производной дробного порядка	Схема Максвелла	Схема Кельвина
0,065	89,0	89,0	89,0	89,0
0,08	94,0	93,6	92,9	92,0
0,1	96,8	97,0	97,0	95,4
0,12	99,2	99,4	100,0	98,3
0,14	101,8	101,4	102,3	100,7
0,16	102,9	103,1	104,0	102,7
0,18	104,2	104,5	105,3	104,2
0,2	106,2	105,8	106,2	106,2
Дисперсия	0,67	0,83	4,56	8,02

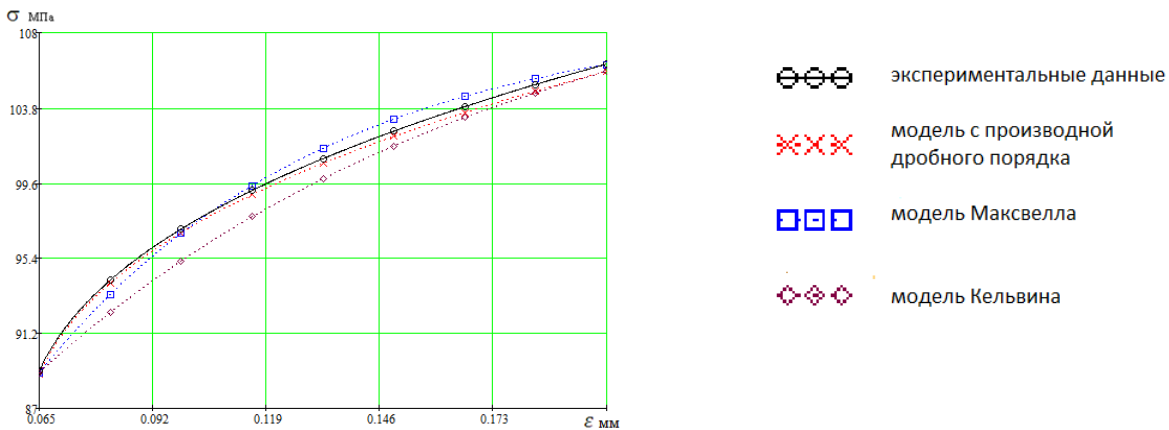


Рисунок 2 – Зависимость напряжение-деформация при растяжении образцов тетрахлоридан (ТХД), экспериментальные данные и модельные кривые

Разработана методика (рисунок 3) вычисления параметров E_1 и β соотношения (16) по экспериментальным данным (параметрическая идентификация).

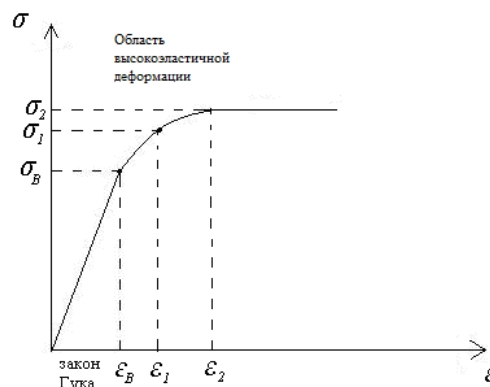


Рисунок 3 – Вычисление параметров вязкоупругого материала

Если, помимо точки вынужденной эластичности $(\varepsilon_B, \sigma_B)$ известны еще два результата измерений: $(\varepsilon_1, \sigma_1)$ и $(\varepsilon_2, \sigma_2)$ то, приняв

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_1 &= \varepsilon_1 - \varepsilon_B, & \Delta\varepsilon_2 &= \varepsilon_2 - \varepsilon_B, \\ \Delta\sigma_1 &= \sigma_1 - \sigma_B, & \Delta\sigma_2 &= \sigma_2 - \sigma_B, \end{aligned} \quad (17)$$

в случае постоянной скорости деформации $\varepsilon(t) = kt$ можно записать:

$$\begin{cases} \Delta\sigma_1 = A\Delta\varepsilon_1^{1-\beta} \\ \Delta\sigma_2 = A\Delta\varepsilon_2^{1-\beta}, \end{cases} \quad (18)$$

где $A = \frac{k^\beta E_1}{\Gamma(2-\beta)}$. Отсюда можно выписать формулы для параметров

$$\beta = 1 - \frac{\ln \frac{\Delta\sigma_2}{\Delta\sigma_1}}{\ln \frac{\Delta\varepsilon_2}{\Delta\varepsilon_1}}; \quad E_1 = \frac{\Gamma(2-\beta)\Delta\sigma_1}{k^\beta \Delta\varepsilon_1^{1-\beta}}. \quad (19)$$

Эти параметры зависят только от свойств материала и инвариантны к функциям нагрузки и деформации.

По формулам (19) получены следующие значения параметров для исследуемых образцов (таблица 2). Использование большего объема данных и применение программного обеспечения позволяет повысить точность вычисления параметров.

Таблица 2 – Параметры соотношений для образцов полиэфиров

Материал	Параметры соотношений $\sigma(t) = E_1 D^\beta \varepsilon(t)$	
	β	$E_1 \left(\frac{\text{МПа} \cdot \text{с}^\beta}{\text{м}} \right)$
ТХД	0,63	290
Ф/Ф	0,42	180
ЭОДХ	0,49	140
диан	0,81	145
ДОДФС	0,46	180

Порядок дробной производной β является ключевым параметром материала (если он близок к нулю, то материал упругий, если к единице, то вязкий). На основе этого параметра могут быть разработаны практические критерии выбора материалов для различных целей.

Далее рассматриваются возможности использования дробного исчисления в теории ползучести. Среди всех теорий (старения, течения, упрочнения и др.) более совершенной и гибкой, отражающей все стороны механических процессов и хорошо согласующейся с опытными данными является теория наследственной ползучести. Согласно этой теории полная деформация вязкоупругого материала складывается из упругой деформации и деформации, развивающейся с течением времени – деформации ползучести.

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_0} + \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau, \quad (20)$$

где $K(t-\tau)$ – ядро ползучести, убывающая функция.

Соотношение (20), наряду с (16) может адекватно описывать напряженно-деформированное состояние полимерных пленок, рассмотренных ранее, но ее практическое использование затруднено в связи с неопределенностью вида и параметров функции $K(t - \tau)$.

Математическое моделирование с использованием дробно-экспоненциальной функции Работнова

$$\sigma(t) = E \left[\varepsilon(t) - \beta \int_0^t \mathfrak{E}_\alpha(-\beta, t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right],$$

где $\mathfrak{E}_\alpha(\beta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \frac{t^{n(1+\alpha)+\alpha}}{\Gamma[(\alpha+1)(n+1)]}$, $-1 < \alpha \leq 0$, является наиболее подходящей для описания экспериментальных кривых ползучести полимеров, бетонов, грунтов, горных пород и др. Однако определение ее параметров при обработке опытных данных остается достаточно сложной задачей. Для ее решения разработана аналитическая методика параметрической идентификации на основе дробного исчисления.

При постоянном напряжении σ_0 уравнение для деформации ползучести может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= E\varepsilon(t) + \eta D^\beta \varepsilon(t) \\ \varepsilon(0) &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Решение (21) представляется в виде интеграла от $\mathfrak{E}_\alpha(\beta, t)$ и может быть записано в виде ряда

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \mathfrak{E}_{\beta-1}(-r, \tau) d\tau = k \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} r^{i-1} \frac{t^{i\beta}}{\Gamma(i\beta + 1)}, \quad (22)$$

где $0 < \beta \leq 1$, $r = \frac{E}{\eta}$, $k = \frac{\sigma_0}{\eta}$ – параметры моделирования.

Вычисления показывают, что в ряду (22) достаточно оставить два первых слагаемых

$$\varepsilon(t) \approx k \left[\frac{t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} - r \frac{t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta + 1)} \right] \quad (23)$$

Параметры уравнения (21) могут быть вычислены из соотношения (23), если известны три результата экспериментальных замеров деформации образца в разные моменты времени: $\varepsilon(t_1) = \varepsilon_1$, $\varepsilon(t_2) = \varepsilon_2$, $\varepsilon(t_3) = \varepsilon_3$.

Параметр β может быть найден при численном решении уравнения

$$\frac{\varepsilon_2 t_1^\beta - \varepsilon_1 t_2^\beta}{\varepsilon_2 t_1^{2\beta} - \varepsilon_1 t_2^{2\beta}} = \frac{\varepsilon_3 t_1^\beta - \varepsilon_1 t_3^\beta}{\varepsilon_3 t_1^{2\beta} - \varepsilon_1 t_3^{2\beta}}. \quad (24)$$

Если β известен, то остальные параметры вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} r &= \frac{\Gamma(2\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1)} \frac{\varepsilon_3 t_1^\beta - \varepsilon_1 t_3^\beta}{\varepsilon_3 t_1^{2\beta} - \varepsilon_1 t_3^{2\beta}}, \\ k &= \frac{\varepsilon_1}{\frac{t_1^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} - r \frac{t_1^{2\beta}}{\Gamma(2\beta + 1)}}. \end{aligned} \quad (25)$$

По формулам (24)–(25) определены параметры для образцов тканого стеклопластика. Проведено сопоставление полученных результатов со значениями, полученными по сложным номографическим методикам (таблица 3).

На рисунке 4 представлено сопоставление результатов, полученных по формуле (21) и экспериментальных данных.

Таблица 3 – Сопоставление значений параметров моделирования

Параметр моделирования	тканый стеклопластик, T = 20 °С, напряжение – 6 МПа	
	Методика с производной дробного порядка	Номографическая методика
β	0,67	0,7
η , МПа · с ^{β}	133	120
E, МПа	19,95	18,90
$r = \frac{E}{\eta}, c^{-\beta}$	0,15	0,16
$k = \frac{\sigma_0}{\eta}, c^{-\beta}$	0,045	0,05

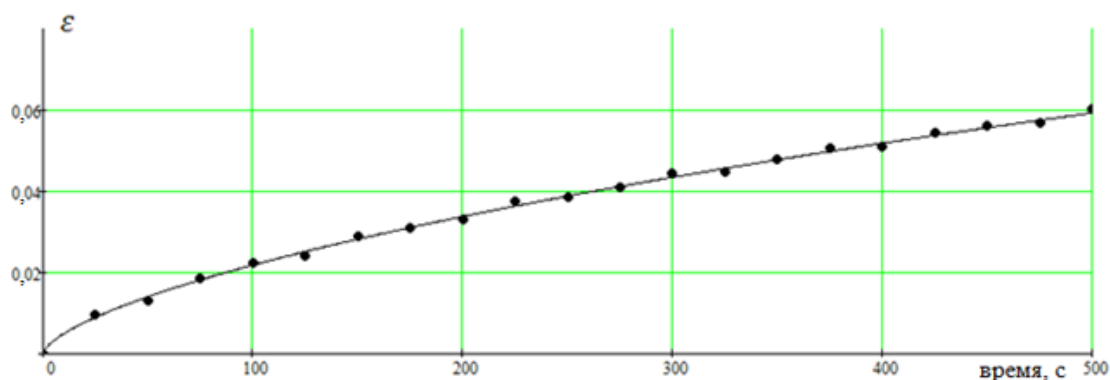


Рисунок 4 – Сопоставление экспериментальных данных и модельных кривых ползучести образцов тканого стеклопластика при T = 20 °С

Адекватность моделирования установлена по критерию Фишера с уровнем значимости 0,05:

$$F_3 = \frac{S_2^2}{S_1^2} = 1,37 \leq F_T(24,21) = 2,05$$

Все параметры, кроме k , не зависят от внешней нагрузки и определяются только свойствами материала. Как и в случае параметрической идентификации соотношения (16) использование большего объема данных и применение программного обеспечения позволяет повысить точность определения параметров. Идентификация параметров позволяет строить долгосрочные прогнозы ползучести изучаемых материалов.

В четвертой главе разрабатываются численные методы решения уравнений с производными дробного порядка, необходимых для использования соответствующих методов математического моделирования. Приведено описание и алгоритмы работы программного обеспечения, в котором реализованы методики параметрической идентификации моделирования вязкоупругих материалов и вычисления собственных значений и функций уравнения осциллятора с вязкоупругим демпфированием.

Если в уравнении (16) значение параметра β известно, то для его численного решения уравнения может быть составлена разностная схема на отрезке $[0, T]$, где T – любой наперед заданный отрезок времени. Разобьем отрезок на N частей стандартным образом с шагом разбиения $h = \frac{T}{N}$. Обозначим $t_i = ih, \sigma_i = \sigma(t_i), \varepsilon_i = \varepsilon(t_i)$. В этом случае разностный аналог дробной производной записывается в виде

$$D^\beta \varepsilon(t_i) = \frac{h^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{k=1}^i \Delta \varepsilon_{k-1} \Delta S_{i-k}^\beta, \quad (26)$$

где $\Delta \varepsilon_{k-1} = \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}, \Delta S_{i-k}^\beta = t_{i-k+1}^\beta - t_{i-k}^\beta, i = 1, \dots, N-1$.

Таким образом, численное решение уравнения (16) сводится к системе линейных уравнений с треугольной матрицей

$$\frac{h^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{k=1}^{i-1} \varepsilon_k (\Delta S_{i-k}^\beta - \Delta S_{i-k-1}^\beta) + \varepsilon_i \left(\frac{h^{-\beta} \Delta S_0^\beta}{\Gamma(2-\beta)} \right) = \frac{\sigma_i}{E_1}. \quad (27)$$

Для апробации данного метода проведено сравнение численного решения с известным аналитическим решением модельной задачи. Задача

$$D^\alpha \varepsilon(t) = \frac{24}{\Gamma(5-\alpha)} t^{4-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, 0 \leq t \leq 1, \quad (28)$$

$$\varepsilon(0) = 0$$

имеет решение $\varepsilon(t) = t^4$. В таблице 4 приведено сравнение численного и точного решения.

Таблица 4 – Погрешность численного метода (27)

Шаг сетки h	$\max \varepsilon(t_i) - \varepsilon_i $
0,04	$8,43 \cdot 10^{-4}$
0,02	$1,63 \cdot 10^{-4}$
0,01	$3,49 \cdot 10^{-5}$
0,005	$7,49 \cdot 10^{-6}$
0,0025	$1,62 \cdot 10^{-6}$
0,00125	$3,51 \cdot 10^{-7}$

Результаты свидетельствуют о низкой погрешности и высокой эффективности метода.

На основе представления (26) также разработаны численные методы для уравнения ползучести (21), проведена их апробация и установлена эффективность.

Исследована разностная схема для численного решения краевой задачи

$$u'' + D_{0x}^\alpha u - \lambda u = 0, \quad (29)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

По аналогии с предыдущим используется стандартное разбиение отрезка $[0, 1]$ с шагом h ($Nh = 1$). Разностный аналог задачи записывается в виде системы уравнений

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^i (u_k - u_{k-1}) \Delta S_{i-k}^\alpha - \lambda u_i = 0, \quad (30)$$

где $x_i = ih$, $u_i = u(x_i)$, $\Delta S_{i-k}^\alpha = (i-k+1)^{1-\alpha} - (i-k)^{1-\alpha}$, $i = 1, \dots, n$.

Таким образом, вычисление собственных значений задачи (29) сводится к алгебраической задаче на собственные значения в n -мерном векторном пространстве для матрицы системы (30). Известно, что все эти собственные значения простые.

Если известно собственное значение λ_n , то соответствующую ему собственную функцию можно найти из системы (30). После преобразований с учетом краевых условий установлено, что система (30) имеет матрицу Хессенберга, которая отличается от треугольной наличием еще одной побочной диагонали. Разработан алгоритм последовательного нахождения решения – сеточной функции u_i :

$$u_i = -\frac{1}{d_{i,i+1}} \sum_{k=0}^{i-1} d_{i,k+1} u_k, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (31)$$

где $d_{i,k}$ – элементы матрицы системы (30).

Установлен критерий устойчивости вычислительного процесса: если для любого $\varepsilon > 0$ существует $h > 0$, что выполняется условие

$$|u_{N-1} - u_1| < \varepsilon,$$

то вычислительный процесс (31) устойчив.

Дано описание работы программного обеспечения, реализующего алгоритмы параметрической идентификации моделирования с использованием производных дробного порядка, описанные в главе 3. Структура программы представлена на рисунке 5.



Рисунок 5 – Структура программы «Параметрическая идентификация моделей с производными дробного порядка»

Реализованный алгоритм параметрической идентификации представлен на рисунке 6. При большом объеме исходных данных программа формирует специальную выборку, по которой проводится идентификация параметров модельного соотношения. Данная процедура позволяет снизить погрешность вычислений и повысить устойчивость к ошибкам в исходных данных.

В случае высокой погрешности идентификации (что, как правило, свидетельствует о большой погрешности экспериментальных данных, либо о плохой адекватности моделирования) у пользователя есть возможность провести корректировку исходных данных.

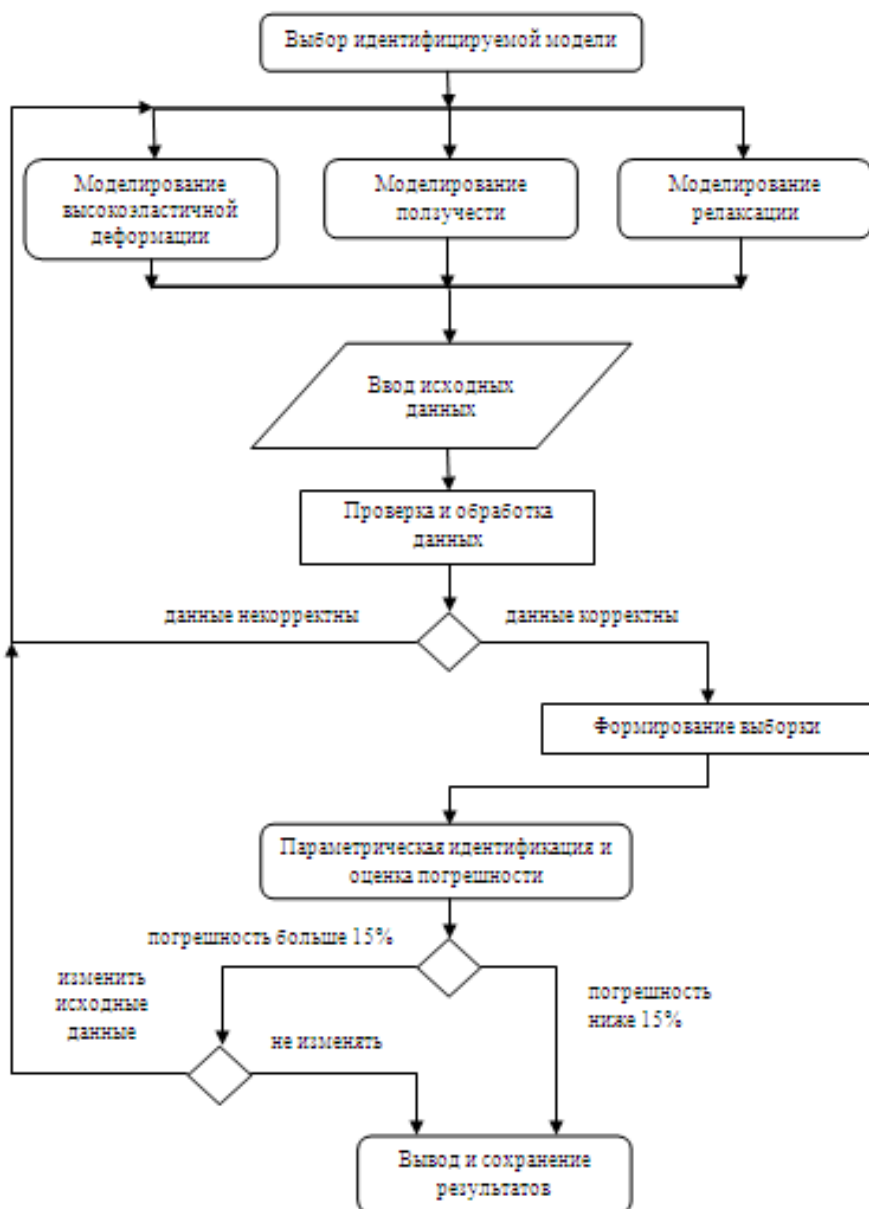


Рисунок 6 – Диаграмма активности программы параметрической идентификации

Методики параметрической идентификации для моделирования вязкоупругости, ползучести и релаксации описаны в третьей главе, общий алгоритм представлен на рисунке 7.

Программа также включает в себя алгоритм вычисления собственных частот для уравнения осциллятора с вязкоупругим демпфированием, представленный на рисунке 8.

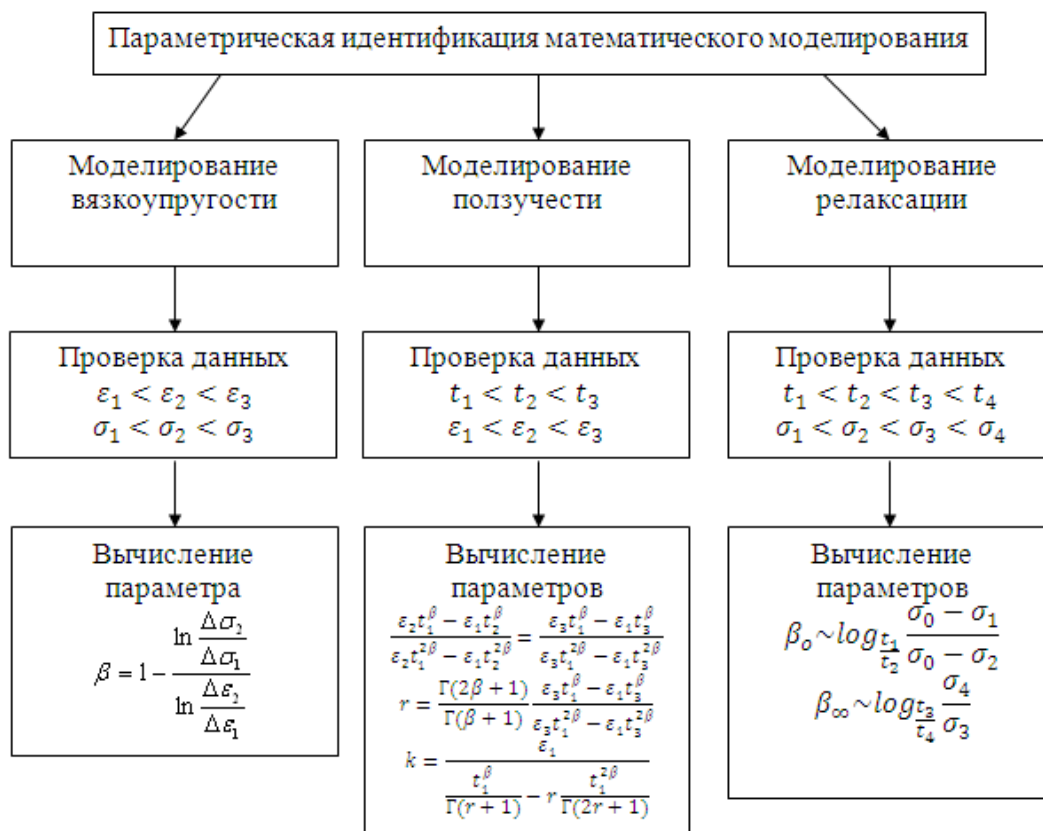


Рисунок 7 – Алгоритм параметрической идентификации

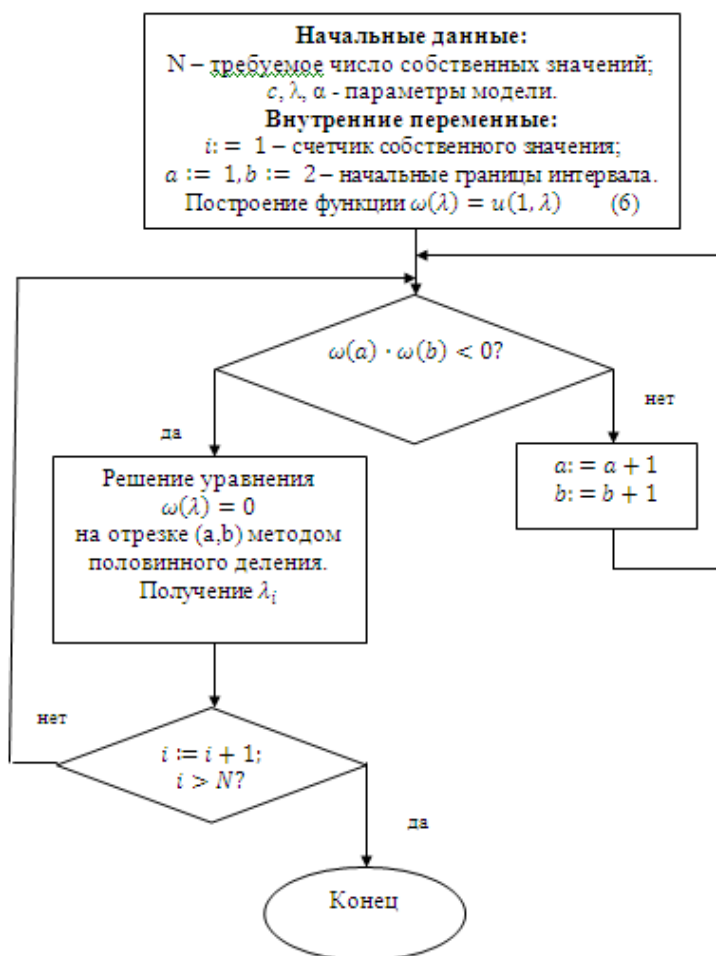
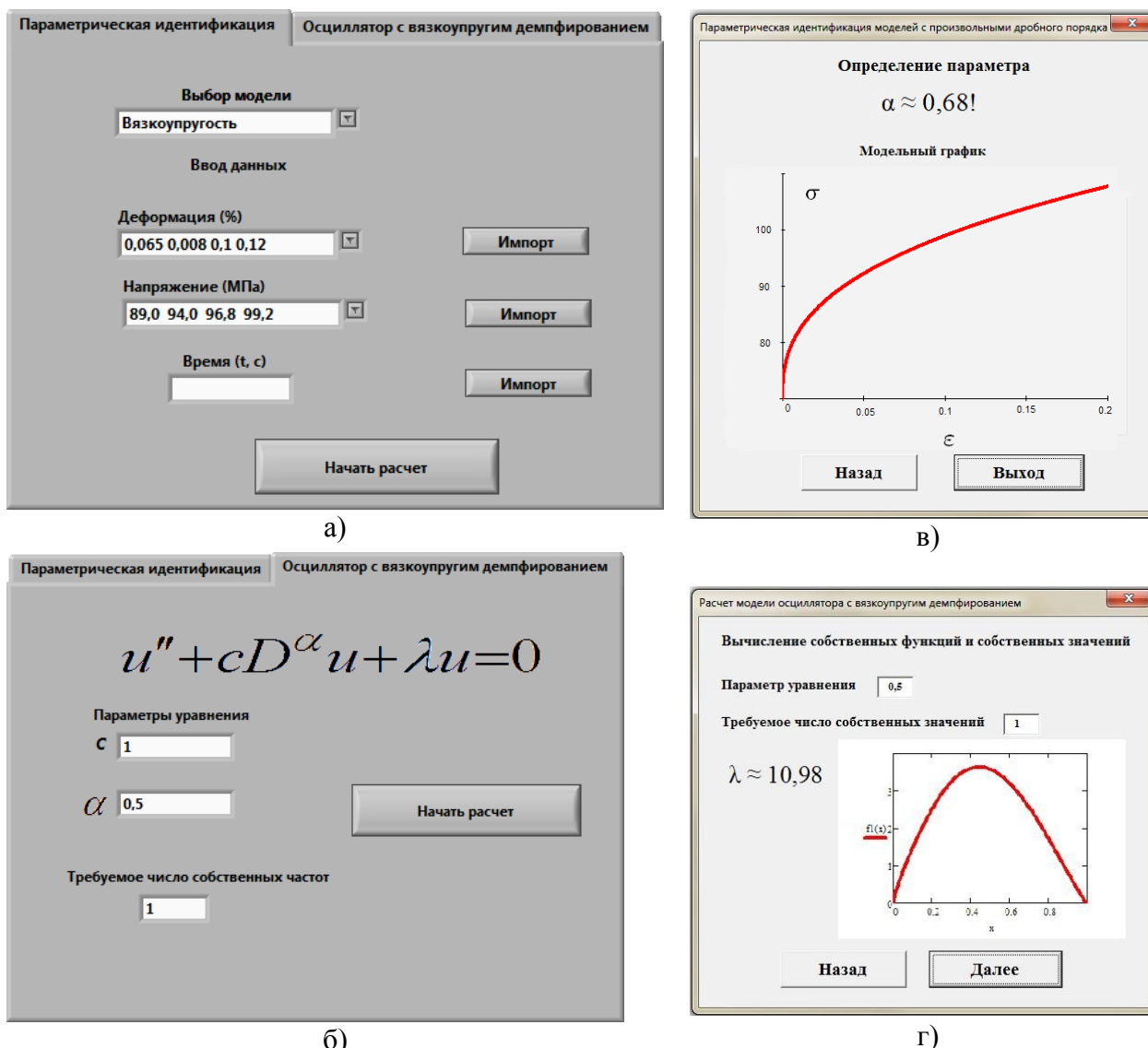


Рисунок 8 – Алгоритм вычисления собственных частот для уравнения осциллятора с вязкоупругим демпфированием

Экранные формы программы представлены на рисунке 9.



а)

б)

в)

г)

Рисунок 9 – Экранные формы программы:
 а) параметрическая идентификация, ввод данных; б) расчет осциллятора, ввод данных;
 в) параметрическая идентификация, результат расчета; г) результат расчета осциллятора

Все программные продукты зарегистрированы в Отраслевом фонде электронных ресурсов «Наука и образование» (ОФЭРНиО).

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ ПО РАБОТЕ

1. Разработан метод математического моделирования напряженно-деформированного состояния вязкоупругих материалов на основе экспериментальных данных, включающий в себя алгоритм параметрической идентификации с элементами дробного исчисления, позволяющий определять порядок оператора дробного дифференцирования как критерий эффективности направленного синтеза.

2. При помощи разработанных алгоритма параметрической идентификации и программного обеспечения вычислены параметры реальных полимеров: тетрахлордиана (ТХД), фенилфталеина (Ф/Ф), 1,1-дихлор-2,2-диэтилена (ЭОДХ), диана, диоксифенилсульфона (ДОДФС), полученных в Научном

центре «Новейшие материалы и технологии». Расхождения значений параметров принятых за основные критерии сравнения, полученные по методам интегральных кривых, не превышают 5%. Результаты могут быть использованы для выбора материала по тем или иным критериям.

3. Разработаны новые алгоритмы параметрической идентификации методов математического моделирования, использующих оператор дробного дифференцирования, позволяющие получить значения ключевых вязкоупругих параметров полимерных материалов. По экспериментальным данным исследований ползучести образцов тканого стеклопластика определены модельные параметры, в частности, порядок дробной производной. Расхождения значений параметров, принятых за основные критерии сравнения, полученные по номографическим методикам, не превышают 10%. Результаты вычислений согласуются с данными, полученными по номографическим методикам, и могут быть использованы для прогнозирования.

4. Установлена адекватность математического моделирования осциллятора с вязкоупругим демпфированием как метода моделирования напряженно-деформированного состояния вязкоупругих материалов, получены аналитические выражения для собственных значений и собственных функций, что позволяет строить адекватные прогнозы поведения осциллирующих систем. Данный метод моделирования может быть использован, например, для расчета изменения деформационно-прочностных характеристик полимербетона при периодическом нагружении.

5. Разработаны новые численные методы решения уравнений с производными дробного порядка, возникающие при математическом моделировании напряженно-деформированного состояния вязкоупругих тел. Погрешность численного решения в узлах сетки по сравнению с известными аналитическими решениями не превышает значения квадрата шага сетки. Построены алгоритмы численного определения собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля для уравнения осциллятора с вязкоупругим демпфированием, определен критерий сходимости вычислительного процесса, что позволяет осуществить численное моделирование НДС вязкоупругих материалов на основе экспериментальных данных.

6. Создан комплекс программ, реализующий алгоритмы параметрической идентификации моделирующих соотношений напряженно-деформированного состояния вязкоупругих материалов на основе экспериментальных данных, содержащих производные дробного порядка, который обеспечивает численные расчеты собственных значений и собственных функций уравнения осциллятора с вязкоупругим демпфированием, необходимые для создания эффективной технологии синтеза вязкоупругих материалов. Реализованы процедуры, позволяющие снизить погрешность вычислений на 30%, повысить быстродействие на 20% и повысить устойчивость к ошибкам в исходных данных.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в журналах и изданиях, рекомендованных ВАК:

1. Ерохин, С.В. Модель деформаций вязкоупругих материалов / С.В. Ерохин, А.М. Гачаев // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2011. – № 1. – С. 39–43.

2. Ерохин, С.В. Модели ползучести и релаксации материалов с использованием производных дробного порядка / С.В. Ерохин // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – № 6. – С. 35–39.

3. Ерохин, С.В. Параметрическая идентификация математической модели вязкоупругих материалов с использованием производных дробного порядка / С.В. Ерохин, Т.С. Алероев, Л.Ю. Фриштер, А.В. Колесниченко // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2015. – Volume 11. – Issue 3. – P. 82–86.

4. Ерохин, С.В. Задача Штурма-Лиувилля для уравнения осциллятора с вязкоупругим демпфированием / С.В. Ерохин, Т.С. Алероев, Л.Ю. Фриштер // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2015. – Volume 11. – Issue 3. – P. 77–81.

Публикации в иных изданиях:

5. Ерохин, С.В. Об одном новом классе осцилляционных матриц / С.В. Ерохин // Математика, информатика, естествознание в экономике и обществе: Труды Всероссийской научно-практической конференции (Москва, 22 ноября 2007 г.). – М.: МФЮА, 2007. – С. 13–16.

6. Ерохин, С.В. Некоторые вопросы теории краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка / С.В. Ерохин // Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики: Сборник докладов Российско-Азербайджанского симпозиума. – Нальчик, 2008. – С. 58–62.

7. Ерохин, С.В. Об одной краевой задаче дифференциального оператора дробного порядка / С.В. Ерохин // Дифференциальные уравнения и топология: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина (Москва, 17–22 июня 2008 г.). – Москва: МГУ, 2008. – С. 125.

8. Erokhin, S.V. Boundary Value Problems for Differential Equations of Fractional Order. Approximation of Inverse Operators by Matrices. Mem. Differential Equations Math. Phys. 49 (2010), pp. 109-119.

9. Ерохин, С.В. Модель деформаций вязкоупругих материалов / С.В. Ерохин // Инженерные системы – 2010: Труды международной научно-практической конференции (Москва, 6–9 апреля 2010 г.). – Москва: РУДН, 2010. – С. 378–381.

Зарегистрированные программы для ЭВМ:

10. Свидетельство о регистрации электронного ресурса № 21059. Параметрическая идентификация моделей с производными дробного порядка / Ерохин С.В. // Объединенный фонд электронных ресурсов «Наука и образование». 09 июля 2015 г.

11. Свидетельство о регистрации электронного ресурса № 21060. Расчет модели осциллятора с вязкоупругим демпфированием / Ерохин С.В. // Объединенный фонд электронных ресурсов «Наука и образование». 09 июля 2015 г.