

*На правах рукописи*



**ВАРЕНИЦА Виталий Викторович**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ТЕРАГЕРЦОВОГО ДИАПАЗОНА  
ЧАСТОТ С НАНОСТРУКТУРИРОВАННЫМИ ОБЪЕКТАМИ  
НА ОСНОВЕ ГРАФЕНА**

**Специальность 05.13.18 – математическое моделирование, численные  
методы и комплексы программ**

**А в т о р е ф е р а т**  
**диссертации на соискание ученой степени**  
**кандидата технических наук**

**Пенза – 2016**

Работа выполнена в филиале ФГКВОУ ВО «Военная академия материально-технического обеспечения имени генерала армии А.В. Хрулева» (г. Пенза) на кафедре «Автоматизированные системы управления и программное обеспечение».

- Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор  
**Голованов Олег Александрович.**
- Официальные оппоненты: **Смирнов Юрий Геннадьевич,**  
доктор физико-математических наук, профессор,  
ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет», заведующий кафедрой «Математика и суперкомпьютерное моделирование»;  
**Якимов Александр Николаевич,**  
доктор технических наук, профессор, ФГАОУ  
ВО «Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения», профессор кафедры «Конструирование и технология электронных и лазерных средств».
- Ведущая организация – АО «Научно-исследовательский институт физических измерений», г. Пенза.

Защита диссертации состоится 27 декабря 2016 года в 13 часов на заседании диссертационного совета Д 212.337.01 на базе ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный технологический университет» по адресу: 440039, г. Пенза, пр. Байдукова / ул. Гагарина, д. 1 а/11, корпус 1, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Пензенский государственный технологический университет» и на сайте [www.penzgtu.ru](http://www.penzgtu.ru).

Автореферат разослан 16 ноября 2016 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



**Чулков Валерий Александрович**

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Графен впервые был впервые получен в 2004 году, он еще недостаточно хорошо изучен, однако, благодаря уникальным свойствам, уже привлекает к себе повышенный интерес специалистов в различных областях науки и техники. За открытие и исследования графена А.К. Гейму и К.С. Новосёлову была присуждена Нобелевская премия по физике за 2010 год. Графен среди всех твердых тел обладает максимальной подвижностью электронов, и ей можно управлять, что объясняет его перспективность для создания нового поколения устройств терагерцового диапазона частот, который в настоящее время интенсивно осваивается. Разработка и создание таких устройств требует глубокого изучения наноструктурированных объектов. Ввиду очевидных сложностей и значительных затрат на экспериментальные исследования графеновых приборов, сопряженных с разработкой и построением специального технологического и измерительного оборудования основным методом исследования и проверки технических решений представляется метод компьютерного моделирования. Однако в настоящее время практически отсутствуют методики и программные средства для моделирования наноструктурированных объектов на основе графена. Это составляет основную проблему на пути создания устройств и приборов терагерцового диапазона на основе графена.

Существующие в настоящее время вычислительные методы, подобные методу конечных элементов (*FEM*) и конечно-разностным методам во временной области (*FTDT*), на основе которых реализованы алгоритмы в известных коммерчески доступных пакетах прикладных программ «*High Frequency Structure Simulator*» (*Ansoft*), «*Advanced Design System*» (*Agilent*), *MSC (MacNeil-Schwendler)*, *Microwave Office*, *Microwave Studio*, *FEKO* широко используются в решении прикладных задач электродинамики. Размер шага дискретизации по пространству в методах *FEM*, *FTDT* должен быть значительно меньше длин электромагнитных (ЭМ) волн и топологических размеров исследуемой структуры. Типичные геометрические размеры наноструктурированных объектов на основе графена составляют десятки нанометров, это предполагает создание сетки с меньшим шагом, что, в свою очередь, требует больших затрат памяти и времени на выполнение расчетных процедур. Методы *FEM*, *FTDT* ориентированы на расчет поля внутри счетной области, если же требуется найти параметры поля на значительном удалении от объекта дифракции, то необходимо увеличение счетной области, что приводит к существенному увеличению и времени моделирования. Существующие модификации методов для нахождения параметров поля на удалении требуют постобработки, что также сопряжено с дополнительными затратами времени.

Численное исследование физических явлений и эффектов в наноструктурированных объектах на основе графена в терагерцовом диапазоне частот требует развития новых подходов к математическому моделированию, опирающихся на мощные вычислительные методы, один из таких подходов основан на декомпозиции с применением аналитических и численных решений для базовых элементов (автономных блоков).

Теоретической основой исследования являются научные работы отечественных ученых А.Н. Тихонова, А.А. Самарского, В.С. Владимирова, С.Л. Соболева, А.Г. Свешникова, В.И. Дмитриева, А.С. Ильинского, В.В. Никольского, Б.З. Каценеленбаума, В.Г. Феоктистова, И.В. Бойкова, Ю.Г. Смирнова, О.А. Голованова.

Математическое моделирование взаимодействия ЭМ-волн терагерцового диапазона частот с устройствами и приборами на основе интегральных проекционных форм в настоящее время затруднено ввиду отсутствия адекватных методов и алгоритмов. В этой связи тема диссертационной работы, посвященная математическому моделированию высокого уровня для наноструктурированных объектов на основе графена, являющихся основой построения перспективных устройств и приборов терагерцового диапазона частот ЭМ-волн, является актуальной. Выполненные оценки по критериям сокращения объема памяти и времени проведения вычислительных процедур показывают перспективность методов математического моделирования на основе проекционных моделей в интегральной форме для устройств и приборов на базе графена, это обусловило направления настоящего исследования.

**Цель работы** состоит в создании новых эффективных методов и алгоритмов математического моделирования процессов взаимодействия ЭМ-волн терагерцового диапазона частот с наноструктурированными объектами на основе графена и в разработке комплекса программ для проведения вычислительного эксперимента над наноструктурированными объектами на основе графена.

Для достижения поставленной цели решаются следующие взаимосвязанные **задачи**.

1. Обоснование метода математического моделирования процесса взаимодействия электромагнитных волн с многослойной структурой графен-диэлектрик на основе уравнений Максвелла в виде материальных уравнений поверхностной проводимости графена, описывающих характеристики наноструктурированных устройств в терагерцовом диапазоне частот.

2. Разработка численного метода определения матрицы проводимости автономных блоков в виде отрезков каналов Флоке с однородным заполнением графеном, а также двумерных периодических структур из полос графена на диэлектрической подложке.

3. Разработка численного проекционного метода решения краевой задачи дифракции в многослойных структурах графен-диэлектрик на основе связанной системы уравнений Максвелла и выполнение математического моделирования параметрических явлений усиления и генерирования электромагнитных волн на комбинационных частотах в наноструктурированных объектах на основе графена.

4. Разработка комплекса программ для математического моделирования наноструктурированных объектов на основе графена и проведение комплексного исследования характеристик наноструктурированных объектов на основе графена с выработкой рекомендаций по использованию комплекса.

**Объектом исследования диссертационной работы** являются наноструктурированные объекты на основе графена и их взаимодействие с ЭМ-волнами терагерцового диапазона частот.

**Предметом исследования** являются математическое моделирование наноструктурированных объектов на основе графена и решение краевых задач дифракции ЭМ-волн в таких объектах.

**Методы исследования.** В процессе решения поставленных задач использованы уравнения математической физики, методы теории матриц, уравнения прикладной электродинамики, а также методы вычислительной математики.

**Соответствие паспорту специальности.** Область исследования соответствует паспорту специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ по пунктам: 1 – «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений», 4 – «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента», 5 – «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента».

**Научная новизна** диссертационной работы состоит в следующем.

1. На основе уравнений Максвелла и уравнения поверхностной проводимости графена разработан метод математического моделирования процессов взаимодействия электромагнитных волн с многослойной структурой графен-диэлектрик и двумерной периодической структурой из нанолент графена, который обеспечивает разработку и комплексное исследование наноструктурированных устройств терагерцового диапазона частот электромагнитных волн.

2. Разработан базирующийся на интегральных проекционных формах декомпозиционный численный метод решения краевой задачи дифракции в автономных блоках в виде прямоугольного параллелепипеда с однородным заполнением графеном, отличающийся определением матрицы проводимости автономных блоков и применением базисных функций с однородно-периодическими краевыми условиями, что позволяет вычислять дескриптор автономного блока в виде матрицы проводимости.

3. Разработан численный метод решения краевой задачи дифракции электромагнитных волн в многослойной структуре графен-диэлектрик на основе проекционно-интегральных форм для связанных систем уравнений Максвелла на комбинационных частотах в режимах параметрического усиления и генерации электромагнитных волн с использованием базисных функций с однородно-периодическими краевыми условиями.

4. Разработан комплекс программ и получены результаты комплексных исследований процессов взаимодействия электромагнитных волн с наноструктурированными объектами на основе графена, реализующими устройства обработки сигналов терагерцового диапазона частот: управляемого фильтра; управляемого поляризатора; параметрического усилителя и генератора.

**Теоретическая значимость работы** заключается в следующем:

– доказаны положения, вносящие вклад в методологию математического моделирования процессов взаимодействия электромагнитных волн с наноструктурированными объектами, разработан новый численный проекционный метод с однородно-периодическими базисными функциями;

– доказана эффективность вычислительных алгоритмов, построенных на основе проекционных моделей в интегральной форме по сравнению с существующими алгоритмами на основе конечно-разностного метода (FDTD) во временной области;

– разработан численный проекционный метод применительно к связанным уравнениям Максвелла, обеспечивающий создание устройств параметрического усиления и генерирования электромагнитных волн на комбинационных частотах.

**Значение результатов исследования для практики** заключается в создании средств компьютерного моделирования графеновых приборов терагерцового рабочего диапазона, обеспечивающих их разработку и исследование при сокращении затрат средств и времени. Определены пределы и перспективы практического использования математических моделей наноструктурированных объектов на основе графена в практике разработки и создании устройств и приборов терагерцового диапазона частот электромагнитных волн.

**Достоверность и обоснованность результатов** обеспечивается:

– использованием апробированных фундаментальных уравнений Максвелла, краевые задачи дифракции сформулированы и решены без упрощения уравнений и краевых условий;

– использованием идеи математического моделирования на основе известного численного проекционного метода, базирующейся на анализе практики использования передовых методов вычислительной математики;

– качественным и количественным совпадением результатов математического моделирования многослойных периодических структур на основе графена с результатами, полученными ранее методом *FDTD*;

– использованием современных методик сбора исходной информации из разделов научного знания: уравнений математической физики и прикладной электродинамики, вычислительной математики, функционального анализа, общепринятых математических моделей.

**На защиту выносятся.**

1. Метод математического моделирования процессов взаимодействия электромагнитных волн наноструктурированных объектов различной геометрии на основе графена в виде системы материальных уравнений поверхностной проводимости графена, отличающейся от известных решением уравнений Максвелла совместно с материальными уравнениями поверхностной проводимости графена.

2. Декомпозиционный численный метод определения проекционно-интегральной формы матрицы проводимости автономных блоков в виде прямоугольного параллелепипеда с неоднородным заполнением графеном с использованием базисных функций с однородно-периодическими краевыми условиями.

3. Численный проекционный метод определения характеристик взаимодействия электромагнитной волны с многослойной структурой графен-диэлектрик на основе проекционно-интегральной формы для связанных систем уравнений Максвелла на комбинационных частотах в режимах параметрического усиления и генерации электромагнитных волн.

4. Комплекс программ и результаты исследований взаимодействия электромагнитных волн с наноструктурированными объектами различной геометрии.

рии на основе графена, реализующими управляемые устройства обработки сигналов терагерцового диапазона частот: управляемого фильтра; управляемого поляризатора; параметрического усилителя и генератора.

**Реализация и внедрение результатов работы.** Основные результаты диссертационной работы и разработанный пакет моделирующих программ внедрены на ряде предприятий.

Разработаны и внедрены в АО «НИТИ им. П.И. Снегирева» (г. Санкт-Петербург), АО «НПП «Краснознаменец» (г. Санкт-Петербург), АО «НПП «Рубин» (г. Пенза) на этапах проектирования комплексы программ для математического моделирования устройств обработки сигналов терагерцового диапазона частот ЭМ-волн на основе графена. Результаты работы использовались при выполнении НИР по гранту РФФИ №12-02-97025-р\_поволжье\_a, 2012-2014 «Исследование электродинамических свойств нового класса наноструктурных материалов на основе нанотрубок, нанопроволок, графена в микроволновом, терагерцовом и инфракрасном диапазонах волн».

В Приложении приведены соответствующие акты внедрения.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на Международном симпозиуме «Надежность и качество сложных систем» (г. Пенза, ПГУ, 2014), на II Всероссийской Микроволновой конференции (26-28 ноября 2014 г., Москва. IRE–ИРЭ им. В.А.Котельникова РАН), на 37 Межвузовской научно-технической конференции «Пути повышения эффективности применения ракетно-артиллерийских комплексов, методы их эксплуатации и ремонта» (2013 г., Пенза, Пензенский филиал военной академии материально-технического обеспечения).

**Публикации.** По материалам диссертационной работы опубликовано 10 работ, в том числе 8 – в рецензируемых журналах, входящих в перечень ВАК.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы. Объем диссертационной работы составляет 150 страниц машинописного текста. Диссертация содержит 57 рисунков, список литературы из 115 наименований.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цели и задачи исследования, отражены научная новизна работы, теоретическая и практическая значимость, перечислены методы исследования, приведены положения, выносимые на защиту.

**Первая глава** посвящена выбор и обоснование математических методов исследования наноструктурированных объектов на основе графена и постановке задачи на математическое моделирование. Графен является двумерным кристаллом, состоящим из одиночного слоя атомов углерода, собранных в гексагональную решетку. Теория графена базируется на гамильтониане уравнения Дирака. Графен является двухдолинным полуметаллом с линейный закон дисперсии, который приводит к линейной зависимости плотности состояний от энергии, в отличие от обычных двумерных систем с параболическим законом дисперсии, где плотность состояний не зависит от энергии. Вблизи дираковской

точки или точки электронейтральности для дираковских фермионов существует конечное значение поверхностной проводимости.

Поверхностная проводимость графена определяется при помощи формулы Кубо:

$$\sigma_s(\omega, \mu_c) = \frac{-ie^2 k_b T}{\pi \hbar^2 (\omega - i2\Gamma)} \left( \frac{\mu_c}{k_b T} + 2 \ln \left( \exp \left( \frac{-\mu_c}{k_b T} \right) + 1 \right) \right) - \frac{ie^2 (\omega - i2\Gamma)}{\pi \hbar^2} \int_0^{\infty} \frac{\left( \exp \left( \frac{-\xi - \mu_c}{k_b T} \right) + 1 \right)^{-1} - \left( \exp \left( \frac{\xi - \mu_c}{k_b T} \right) + 1 \right)^{-1}}{(\omega - i2\Gamma)^2 - \left( \frac{2\xi}{\hbar} \right)^2} d\xi, \quad (1)$$

где  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ К}$  – заряд электрона  $k_b = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$  – постоянная Больцмана,  $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$  – постоянная Планка,  $T = 300^0 \text{ К}$  – температура,  $\Gamma = 10^{12} \text{ 1/с}$  – скорость релаксации,  $\mu_c = 0 - 1 \text{ эВ}$  – химический потенциал ( $1 \text{ эВ} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ ),  $\omega = 2\pi f$  – частота.

Управлять поверхностной проводимостью графена можно путем изменения значений химического потенциала. Проведен расчет проводимости графена по формуле Кубо. При изменении химического потенциала от 0,0 эВ до 1,0 эВ поверхностная проводимость графена увеличивается примерно в 20 раз. Управление химическим потенциалом осуществляется нормальной составляющей электрического поля смещения к двумерной пленке графена. Зависимость поверхностной проводимости графена от электрического смещения поля является нелинейной.

Математическое моделирование наноструктурированных объектов базируется на уравнениях Максвелла, которые включают комплексную диэлектрическую проницаемость графена:

$$\hat{\epsilon}_b(\omega, \mu_c) = \epsilon_b - \frac{i\sigma(\omega, \mu_c)}{\epsilon_0 \omega d}, \quad (2)$$

где  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$  – диэлектрическая постоянная,  $\epsilon_b$  – диэлектрическая проницаемость графена,  $d = 1 \cdot 10^{-9} \text{ м}$  – эффективная толщина монослоя графена.

Основными методами решения прикладных задач электродинамики являются: метод конечных разностей во временной области *FDTD*, метод Бубнова-Галеркина, метод Трефтца для частичных областей, метод поперечных сечений. Вычислительные алгоритмы, разработанные на основе методов Бубнова-Галеркина, Трефтца, поперечных сечений позволяют существенно расширить класс решаемых краевых задач дифракции для устройств терагерцового диапазона частот на основе графена, по сравнению с методом *FDTD*, включая, в том числе и нелинейные задачи дифракции. Для математического моделирования устройств терагерцового диапазона частот ЭМ-волн на основе графена выбираем проекционный метод Бубнова-Галеркина. Он более универсальный и простой в реализации по сравнению с методами Трефтца и поперечных сечений.

Цель работы, которая вытекает из обзора, состоит в построение математических моделей наноструктурированных объектов на основе графена, разработ-



ке численного метода решения краевых задач дифракции для ЭМ-волн на основе проекционных моделей в интегральной форме, реализации численных методов и алгоритмов в виде комплексов программ и исследование проблем создания устройств терагерцового диапазона частот ЭМ-волн с применением технологии вычислительного эксперимента.

**Вторая глава** посвящена математической формализации электродинамических систем. Объектами исследований прикладной электродинамики являются нерегулярные структуры, продольно-регулярные структуры, резонаторные структуры, периодические структуры. Сформулированы задачи на исследование периодических структур (определение фазы поля вдоль ячейки структуры), резонаторов (определение собственных частот и полей), для волноводов (определение постоянных распространения волн), для нерегулярных структур (определение матриц рассеяния).

Математическое моделирование наноструктурированных объектов на основе графена терагерцового диапазона частот ЭМ-волн базируется на решении уравнений Максвелла с эффективной комплексной диэлектрической проницаемостью графена в виде (2) и условиями неасимптотического излучения на входных сечениях наноструктурированного объекта (волноводного трансформатора):

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = i\omega \epsilon_0 \epsilon_a \vec{E}; \\ \text{rot } \vec{E} = i\omega \mu_0 \mu_a \vec{H}; \\ (\vec{E}_\alpha - \vec{E}_\alpha^+)_\tau = \vec{W}_\alpha (\vec{H}_\alpha - \vec{H}_\alpha^+)_\tau \text{ на } S_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p. \end{cases} \quad (3)$$

где  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  – напряженность электрического и магнитного полей,  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  – диэлектрическая и магнитная постоянные,  $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости (в области графена  $\epsilon_a = \epsilon_b$ ,  $\mu_a = 1$ ),  $\omega$  – частота,  $(\vec{E}_\alpha - \vec{E}_\alpha^+)_\tau = \vec{W}_\alpha (\vec{H}_\alpha - \vec{H}_\alpha^+)_\tau$  – условие неасимптотического излучения,  $\vec{E}_\alpha$ ,  $\vec{H}_\alpha$  – полное ЭМ-поле в волновых каналах волноводного трансформатора, а  $\vec{E}_\alpha^+$ ,  $\vec{H}_\alpha^+$  – система прямых волн волновых каналов. Оператор  $\vec{W}_\alpha$  для  $\alpha$ -го волнового канала задан в форме:

$$\vec{W}_\alpha(\dots) = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{e}_{n(\alpha)} \frac{W_{n(\alpha)}^-}{|W_{n(\alpha)}^-|} \int (\vec{e}_{n(\alpha)}^* \times \dots) d\vec{S}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (4)$$

где  $W_{n(\alpha)}^\pm$  – волновые сопротивления для прямых и обратных волн,  $\vec{e}_{n(\alpha)}$ ,  $\vec{h}_{n(\alpha)}$  – электрические и магнитные поперечные составляющие волн в каналах волноводного трансформатора.

Описание дифракции в 2D периодических структурах проводится следующим образом. Пространственная ячейка 2D- периодической структуры (рисунок 1, б) рассматриваться как канал Флоке с объектом дифракции (рисунок 1, а), на стенках которого выполняются периодические краевые граничные условия, причем фазовые сдвиги определяются исходя из ориентации плоской однородной волны, падающей на структуру систему в свободном пространстве.

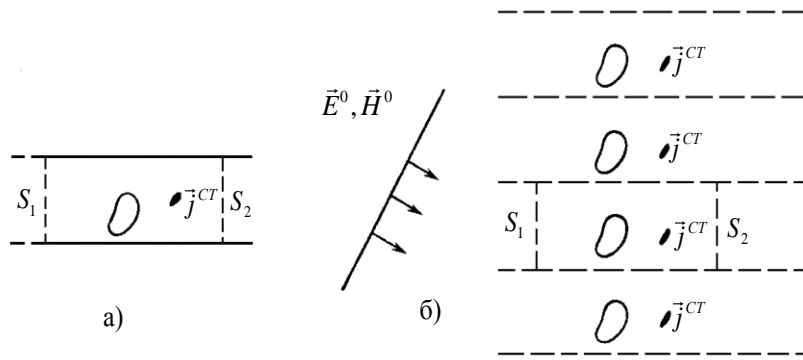


Рисунок 1 – Дифракция в волновых структурах:

- а) простейший волноводный трансформатор (канал Флоке с объектом дифракции);
- б) 2D- периодическая структура

Предметом изучения в трехмерной 3D периодической структуре является нулевая пространственная гармоника, которой соответствует постоянная распространения волны  $\Gamma_0 = \nu$ . В периодической структуре выделяется ячейка в виде прямоугольного параллелепипеда с объектом дифракции (волноводный трансформатор), для которого определяется матрица проводимости  $\mathbf{Y}$ . Постоянные распространения  $\Gamma_n$  волн в 3D трехмерной периодической структуре из решения характеристического уравнения.

Для волноводного трансформатора с нелинейной средой связь между амплитудами  $c_{n(\beta)}^+(\omega_l)$  падающих волн и амплитудами  $c_{k(\alpha)}^-(\omega_m)$  отраженных волн на комбинационных частотах устанавливается при помощи системы нелинейных уравнений (дескрипторов)  $c_{k(\alpha)}^-(\omega_m) = F_{k(\alpha)}^-(\omega_m; c_{n(\beta)}^+(\omega_l))$ . Подобная связь между амплитудами  $c_{n(\beta)}^+(\omega_l)$ ,  $c_{k(\alpha)}^-(\omega_l)$  для волноводных трансформаторов с линейными средами осуществляется с помощью матриц рассеяния  $\mathbf{S}$ .

**Третья глава** посвящена методам математического моделирования наноструктурированных объектов на основе графена и численным методам решения краевых задач дифракции ЭМ-волн в наноструктурах. Математическое моделирование многослойных структур графен-диэлектрик терагерцового диапазона ЭМ-волн базируется на декомпозиционном подходе (рисунок 2). Область многослойной структуры (рисунок 2, а) разбивается на автономные блоки в виде прямоугольных параллелепипедов с однородным графеновым (диэлектрическим) заполнением и каналами Флоке на входных сечениях (рисунок 2, б). Решение краевой задачи дифракции ищется как объединение (рекомпозиция) автономных блоков.

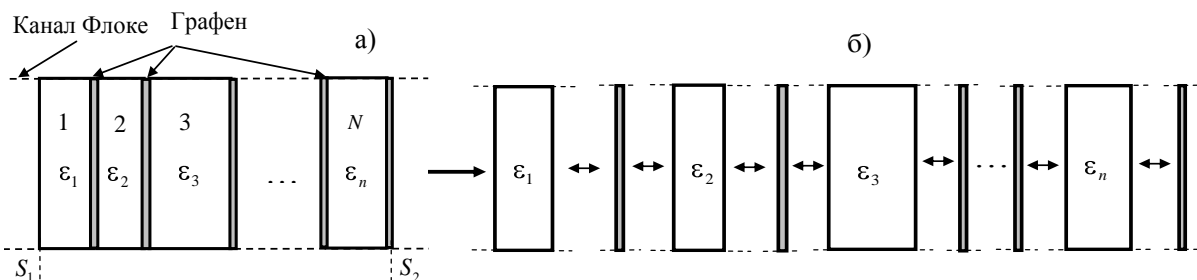


Рисунок 2 – Декомпозиционный подход математического моделирования: а) многослойная структура графен-диэлектрик; б) декомпозиция на автономные блоки

Из решения краевой задачи дифракции для уравнений Максвелла получены аналитические выражения для вычисления матриц проводимости  $\mathbf{Y}$  автономных блоков в виде прямоугольных параллелепипедов с однородным графеновым и диэлектрическим заполнением:

$$Y_{kn}^{11} = Y_{kn}^{22} = -i\delta_{kn} \frac{W_k}{W_k^0} \frac{\cos \Gamma_k^0}{\sin \Gamma_k^0}, \quad Y_{kn}^{12} = Y_{kn}^{21} = i\delta_{kn} \frac{W_k}{W_k^0} \frac{1}{\sin \Gamma_k^0}, \quad (5)$$

где  $\delta_{kn}$  – символ Кронекера,  $W_k$ ,  $W_k^0$  – волновое сопротивление канала Флоке с диэлектрическими и магнитными проницаемостями  $\varepsilon$ ,  $\mu$  и  $\varepsilon^0$ ,  $\mu^0$  (графен или диэлектрик),  $\Gamma_k^0$  – постоянные распространения волн канала Флоке с проницаемостями  $\varepsilon^0$ ,  $\mu^0$ .

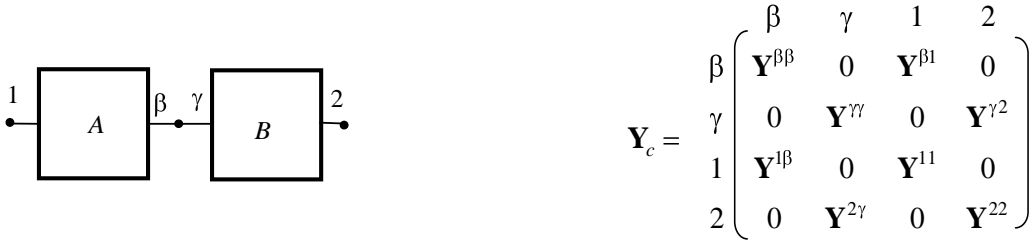


Рисунок 3 – Сводная матрица проводимости  $\mathbf{Y}_c$  фрагмента рекомпозиции автономных блоков А, В с матрицами проводимости  $\mathbf{Y}_A$  и  $\mathbf{Y}_B$

Разработан численный алгоритм рекомпозиции автономных блоков с дескрипторами в виде матриц проводимости. Фрагмент рекомпозиции показан на рисунке 3. Из условия непрерывности касательных, составляющих электрических и магнитных полей  $\vec{E}_\tau^A = \vec{E}_\tau^B$ ,  $\vec{H}_\tau^A = \vec{H}_\tau^B$  на входных сечениях автономных блоков  $S_\beta$  и  $S_\gamma$  (рисунок 3) получено выражение для получения матрицы проводимости объединенных объектов А, В:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^{\alpha\alpha} + \mathbf{Y}^{\alpha\beta} + \mathbf{Y}^{\alpha\gamma} \quad \mathbf{Y}^{\beta\beta} - \mathbf{Y}^{\gamma\gamma} \quad \mathbf{Y}^{\gamma\alpha} - \mathbf{Y}^{\beta\alpha} \quad (6)$$

Разработан метод имитационного вероятностного математического моделирования многослойных структур графен-диэлектрик. Эффективная комплексная диэлектрическая проницаемость графена является величиной случайной и распределена по нормальному закону. Используя генераторы случайных чисел, распределенных по нормальному закону, для имитации случайных величин комплексной диэлектрической проницаемости получаем, используя детерминированное математическое моделирование, реализации случайных функций коэффициента прохождения  $TEM$ -волны через многослойную структуру. Затем по реализациям случайных функций определяем численное значение математического ожидания коэффициента прохождения (элемент матрицы рассеяния  $|S_{21}|$ ).

Математическое моделирование двумерной периодической структуры из лент графена, расположенных на диэлектрической подложке (рисунок 4, а), сводится к определению дескриптора в виде матрицы проводимости ячейки периодической структуры (рисунок 4, б). Решение краевой задачи дифракции ЭМ-волн на ячейке периодической структуры ищем как объединение (рекомпозиция) двух автономных блоков (рисунок 4, в). Автономный блок 1 – канал Флоке с лентой графена, автономный блок 2 – канал Флоке с диэлектрическим слоем.

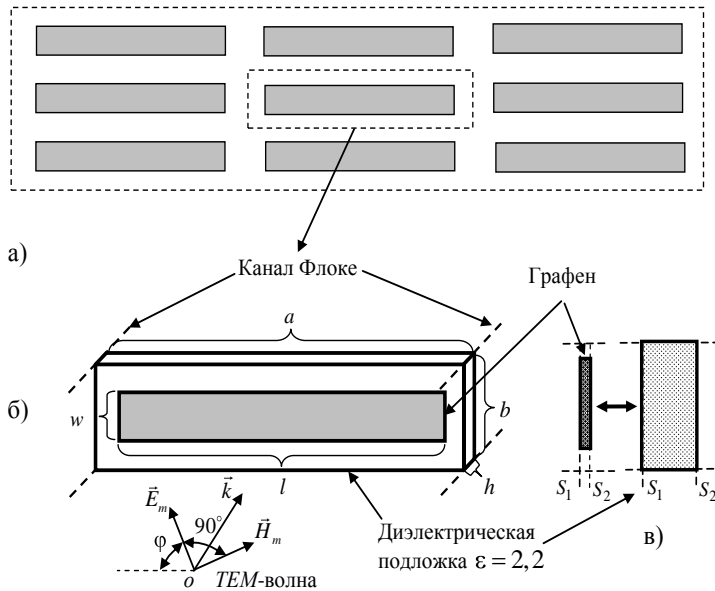


Рисунок 4 – Алгоритм математического моделирования:  
а) двумерная периодическая структура из полос графена;  
б) ячейка периодической структуры в виде волноводного трансформатора;  
в) декомпозиция ячейки на автономные блоки

условиями на гранях параллелепипеда. Краевая задача дифракции для уравнений Максвелла (3) сведена к интегральной проекционной форме

$$\begin{aligned} \iint_{S_{\Sigma}} (\vec{H} \times \vec{E}_k^*) \cdot d\vec{S} &= i\omega \varepsilon_0 \int_{V_0} \varepsilon_a \vec{E} \cdot \vec{E}_k^* dV - i\omega_k \mu_0 \int_{V_0} \vec{H} \cdot \vec{H}_k^* dV, \\ \iint_{S_{\Sigma}} (\vec{E} \times \vec{H}_k^*) \cdot d\vec{S} &= -i\omega \mu_0 \int_{V_0} \mu_a \vec{H} \cdot \vec{H}_k^* dV + i\omega_k \varepsilon_0 \int_{V_0} \vec{E} \cdot \vec{E}_k^* dV, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

из которой получена матричная система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{N} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{d} \cdot \tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{d} \cdot \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{U} \cdot \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}, \end{cases} \quad (8)$$

где  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{U}$  – матрицы. Из системы уравнений (5) получена матрица проводимости автономного блока 1:  $\mathbf{Y} = (\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{M} - \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{d}^{-1} \cdot \mathbf{N}$ , где  $\mathbf{Q} = \mathbf{d} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{d}^{-1} \cdot \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{I}$  – единичная матрица. Матрица проводимости затем преобразуется в матрицу  $\mathbf{S} = \mathbf{I} + \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{I} - \mathbf{Y}$ .

На рисунке 5 показана многослойная структура графен-диэлектрик в параметрических режимах функционирования. Вектор электрического поля ЭМ-волны направлен перпендикулярно к листам графена и изменяет поверхностную проводимость графена, а, следовательно, и комплексную диэлектрическую проницаемость. Это приводит к параметрическим явлениям усиления и генерации ЭМ-волн в многослойной структуре графен-диэлектрик.

Математическое моделирование параметрических явлений базируется на связанных системах уравнений Максвелла для комбинационных частот

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H}(\omega_m) &= i\omega_m \varepsilon_0 \varepsilon(\omega_m) \vec{E}(\omega_m) + \vec{J}(\omega_m), \\ \text{rot} \vec{E}(\omega_m) &= -i\omega_m \mu_0 \mu(\omega_m) \vec{H}(\omega_m), \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

Для вычисления матрицы проводимости автономного блока 2 получены из решения краевой задачи дифракции аналитические выражения (5). Разработан численный проекционный метод вычисления матрицы проводимости автономного блока 2, основой построения которого является метода Бубнова-Галеркина. Базисные функции  $\vec{E}_k, \vec{H}_k$  в методе

являются решением краевой задачи на собственные значения для прямоугольного резонатора с однородно-периодическими краевыми

где  $\omega_m = k\omega_1 + n\omega_2$  ( $k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) – комбинационные частоты,  $\vec{J}(\omega_m)$  – ток на комбинационных частотах в области листов графена. Получено аналитическое выражение для тока  $\vec{J}(\omega_m)$  на комбинационных частотах при аппроксимации четным многочленом 6-й степени нелинейной зависимости поверхностной проводимости графена от электрического поля смещения.

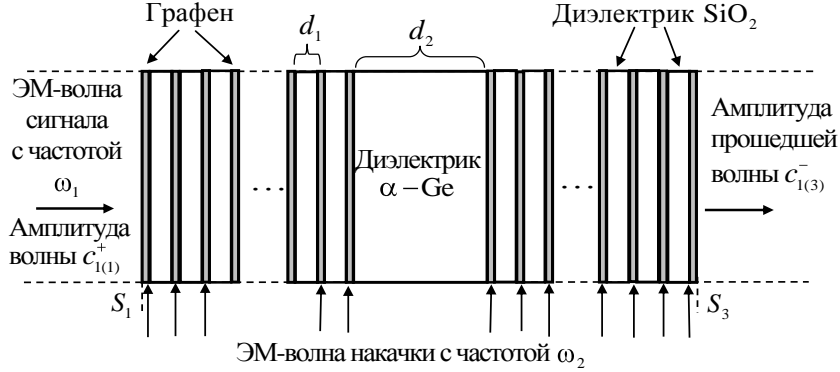


Рисунок 5 – Многослойная структура графен-диэлектрик в параметрических режимах функционирования

Разработан численный проекционный метод вычисления дескриптор-матрицы параметрической системы на основе многослойной структуры графен-диэлектрик, который базируется на проекционном методе Бубнова-Галеркина. Базисные функции в методе являются решением краевой задачи на собственные значения для прямоугольного резонатора с однородно-периодическими краевыми условиями на гранях параллелепипеда. Краевая задача дифракции ЭМ-волн в многослойной структуре графен-диэлектрик для связанных уравнений Максвелла на комбинационных частотах сведена к проекционной интегральной форме:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{S_\alpha} (\vec{E}_\alpha(\omega_m) \times \vec{h}_{k(\alpha)}^*) \cdot d\vec{S}_\alpha - \frac{1}{2} \int_{S_\alpha} (\vec{e}_{k(\alpha)} \times \vec{H}_\alpha^*(\omega_m)) \cdot d\vec{S}_\alpha = c_{k(\alpha)}^-(\omega_m), \\
& \int_{S_\Sigma} (\vec{E}(\omega_m) \times \vec{H}_k^*) \cdot d\vec{S} = -i\omega_m \mu_0 \int_{V_0} \mu \vec{H}(\omega_m) \cdot \vec{H}_k^* dV + i\omega_k \varepsilon_0 \int \vec{E}(\omega_m) \cdot \vec{E}_k^* dV, \\
& \int_{S_\Sigma} (\vec{H}(\omega_m) \times \vec{E}_k^*) \cdot d\vec{S} = i\omega_m \varepsilon_0 \int_{V_0} \varepsilon \vec{E}(\omega_m) \cdot \vec{E}_k^* dV - i\omega_k \mu_0 \int_{V_0} \vec{H}(\omega_m) \cdot \vec{H}_k^* dV + \\
& + \sum_{q=1}^{\infty} A_q \int_{V_0} E(\omega_q) \cdot \vec{E}_k^* dV, \quad k = 1, 2, \dots, N_{\text{баз}}, \quad m = 1, 2, \dots, M.
\end{aligned} \tag{9}$$

где  $N_{\text{баз}}$  – количество учтенных базисных функций проектирования,  $M$  – количество учтенных комбинационных частот,  $S_\Sigma = S_1 \cup S_3$ .

Из проекционной формы получена система алгебраических уравнений на комбинационных частотах:

$$\begin{cases} \mathbf{N} \cdot \mathbf{c}^-(\omega_m) - \mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{a}}(\omega_m) + \mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{b}}(\omega_m) = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{c}^+(\omega_m), \\ \mathbf{M} \cdot \mathbf{c}^-(\omega_m) + \mathbf{C} \cdot \tilde{\mathbf{a}}(\omega_m) - \mathbf{D} \cdot \tilde{\mathbf{b}}(\omega_m) + \sum_{q=1}^L A_q \mathbf{F} \cdot \mathbf{c}^-(\omega_q) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{c}^+(\omega_m) - \sum_{q=1}^L A_q \mathbf{F} \cdot \mathbf{c}^+(\omega_q), \\ \mathbf{I} \cdot \mathbf{c}^-(\omega_m) - \mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{a}}(\omega_m) + \mathbf{U} \cdot \tilde{\mathbf{b}}(\omega_m) = \mathbf{0}, \quad m = 1, 2, \dots, M, \end{cases} \tag{10}$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица,  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{F}, \mathbf{R}, \mathbf{U}$  – матрицы. Матрица системы алгебраических уравнений (10) является дескриптором параметрической системы. Если определитель матрицы отличен от нуля – параметрическое усиление, если определитель равен нулю (близок к нулю) – параметрическая генерация.

**Четвертая глава** посвящена разработке комплекса программ и исследованию проблем создания устройств терагерцового диапазона частот электромагнитных волн на основе графена. Разработан комплекс программ для исследования наноструктурированных объектов на основе графена с применением математического моделирования и вычислительного эксперимента. В состав комплекса входят программы: *abloc1* (вычисление матрицы проводимости автономного блока в виде прямоугольного параллелепипеда с однородным графеновым заполнением), *abloc2* (вычисление матрицы проводимости автономного блока в виде прямоугольного параллелепипеда с однородным диэлектрическим заполнением), *abloc3* (вычисление матрицы проводимости автономного блока в виде прямоугольного параллелепипеда с неоднородным заполнением в виде ленты графена), *abloc4* (вычисление матрицы-дескриптора параметрической системы на основе многослойной структуры графен-диэлектрик), *rekom* (рекомпозиция автономных блоков и преобразования матриц проводимости в матрицы рассеяния), *random1* (реализация имитационно-вероятностного математического моделирования), *random2* (вычисление математического ожидания и дисперсии по реализациям случайных функций), *graph* (построение графиков в декартовой и полярной системах координат). Комплекс программ реализован в среде *Visual Basic*.

Комплекс программ позволяет проводить математическое моделирование различных устройств терагерцового диапазона частот ЭМ-волн. Комплекс программ использовался для исследования проблем создания управляемого фильтра терагерцового диапазона частот на основе многослойной структуры графен-диэлектрик. управляемого поляризатора на основе двумерной периодической структуры из лент графена, параметрического усилителя и генератора на основе многослойной структуры графен-диэлектрик с применением технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента. На рисунке 6 показана структурная схема алгоритма использования программ комплекса (*abloc1*, *abloc2*, *abloc4*, *rekom*, *graph*) для математического моделирования параметрического усилителя и генератора терагерцового диапазона частот ЭМ-волн и экранные формы.

На рисунке 7 показан график зависимостей коэффициента прохождения управляемого фильтра при различном количестве листов графена и двух значениях химического потенциала равных 0 эВ и 1,0 эВ. При потенциале  $\mu_c = 0,0$  эВ (электрическое поле смещения отсутствует) фильтр пропускает ЭМ-волну лазерного излучения с ослаблением в 2...4,5 дБ. При подаче электрического поля смещения химический ( $\mu_c = 1,0$  эВ) фильтр имеет ослабление лазерного излучения на частоте 28,3 ТГц от 20...40 дБ в зависимости от количества листов графена. Такие управляемые фильтры могут успешно использоваться в системах защиты от лазерного излучения. Проведено сравнение результатов расчета коэффициентов прохождения ЭМ-волны через фильтры на основе многослойных структур графен-диэлектрик, полученных предложенным методом и методом конечных разностей во временной области (*FDTD*). Наблюдалось совпадение результатов на уровне слияния графиков.

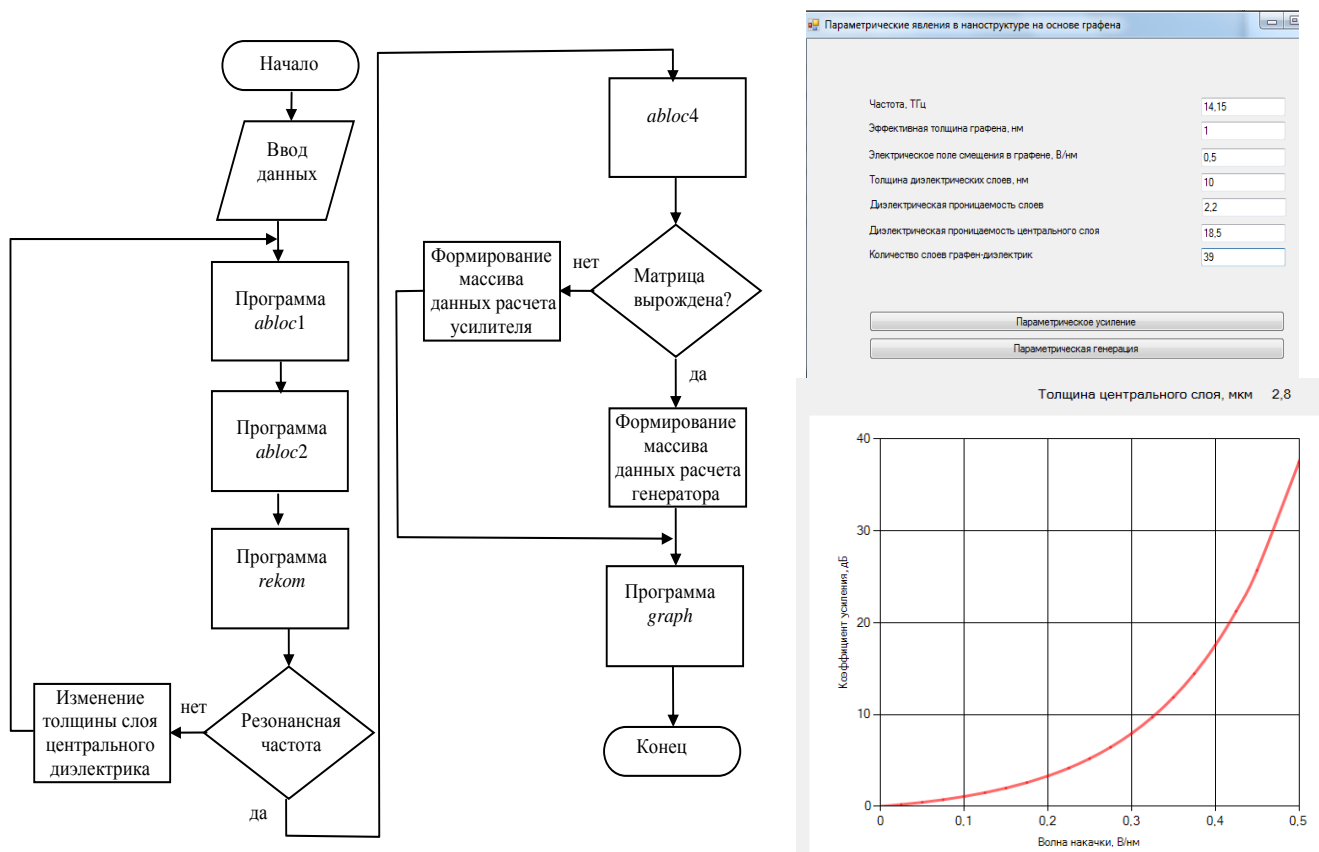


Рисунок 6 – Структурная схема алгоритма математического моделирования параметрического усилителя и генератора на основе структуры графен-диэлектрик и экранные формы

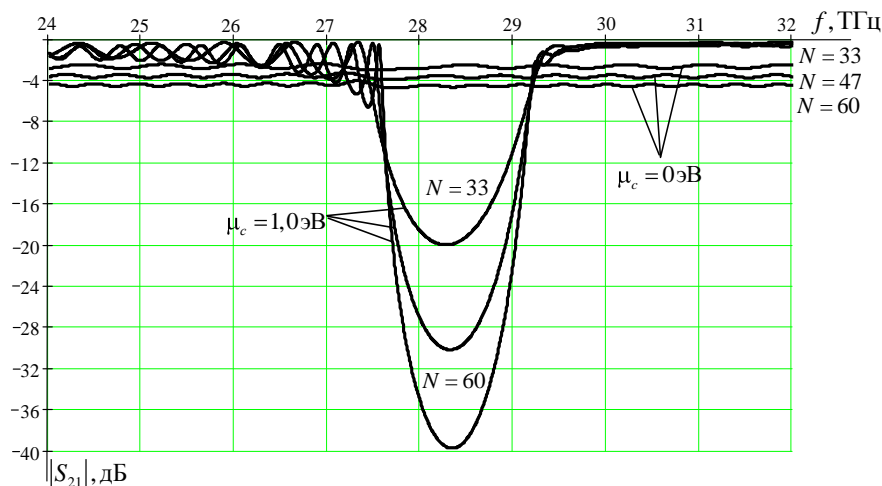


Рисунок 7 – Зависимость коэффициента прохождения фильтра от частоты для различных многослойных структур графен-диэлектрик:  $h = 3,65 \text{ мкм}$  (толщина диэлектрических слоев),  $\epsilon = 2,2$  (диэлектрическая проницаемость слоев)

Управляемый фильтр обладает устойчивостью по отношению к разбросу значений поверхностной проводимости листов графена. При относительном среднеквадратическом отклонении  $\sigma_{\text{отн}} = 100\%$  (поверхностная проводимость листов графена может отличаться более чем в два раза) фильтр практически сохраняет свои параметры (рисунок 8). Современные технологии изготовления графена обеспечивают среднеквадратическое отклонение поверхностной проводимости листов графена на уровне порядка  $\sigma_{\text{отн}} = 50\%$ .

Проведено исследование характеристик поляризаторов на основе двумерных периодических структур из полос графена с применением математического моделирования и вычислительного эксперимента.

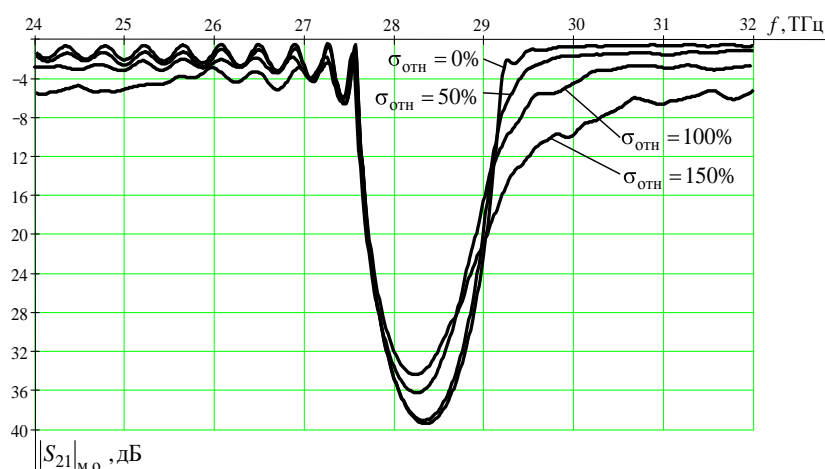


Рисунок 8 – Вероятностный расчет фильтра на основе многослойной структуры графен-диэлектрик: поверхностная проводимость графена случайная величина;  
 $N = 60$ ,  $h = 3,65$  мкм,  $\epsilon = 2,2$

На рисунке 9 показаны результаты расчетов коэффициента прохождения через периодическую структуру из полос графена (рисунок 4), полученных методом конечных разностей во временной области (*FDTD*) и проекционно-интегральным методом. Наблюдается совпадение результатов расчетов по уровню затухания (-12 дБ) и резонансной частоте ( $f = 9,2$  ТГц) на плазмоне графеной полосы, в остальной области – результаты расчетов несколько отличаются. В проекционном методе используется строгая электродинамическая постановка краевой задачи дифракции. На входных сечениях используются условия неасимптотического излучения – в состав спектра волнового процесса входит волна основного типа (поперечно-электромагнитная волна) и запердельные высшие типы волн. В методе *FDTD* в спектр волнового процесса входит только волна основного типа. Входные сечения были вынесены в квазирегулярную область на расстояние 2,5 мкм ( $0,075 \lambda$ ) от основного объекта дифракции. Такого расстояния не достаточно для затухания запердельных волн, согласно электродинамической теории оно должно быть не менее  $0,3 \lambda$ . Строгая постановка электродинамической задачи требует в методе *FDTD* расширение квазирегулярной области до  $0,3 \lambda$ , что приводит к увеличению времени расчетов на компьютере почти на два порядка. Это является узким местом метода *FDTD*.

Зависимость коэффициента прохождения для периодической структуры из полос графена на частоте  $f = 28,3$  ТГц от угла ориентации падающей ЭМ-волны показана в полярной системе координат на рисунке 10. Периодическая структура из полос графена на подложке из двуокиси кремния  $\text{SiO}_2$  может использоваться в качестве поляризатора на длине волны 10,6 мкм.

Параметрический усилитель представляет собой 39-ти слойный фильтр Фабри-Перо, который состоит из чередующихся слоев графен-диэлектрик (рисунок 5). Центральный диэлектрик – аморфный германий  $\alpha\text{-Ge}$ . Математическое моделирование показало, что при изменении электрического поля смещения на величину  $\Delta E_{z0} = 0,5$  В/нм для химического потенциала резонансная



частота фильтра Фабри-Перо изменяется на 10%. Зависимость коэффициента усиления параметрического усилителя от амплитуды волны накачки показана на рисунке 11. Результаты моделирования получены при  $N_{\text{баз.}}=72$  (количество базисных функций в проекционной форме),  $L=5$  (количество типов волн, учтенных на входных сечениях многослойной структуры графен-диэлектрик). Дальнейшее расширение базисов  $N_{\text{баз.}}=98$ ,  $L=10$  незначительно изменяло результаты (штриховая кривая на рисунке 11).

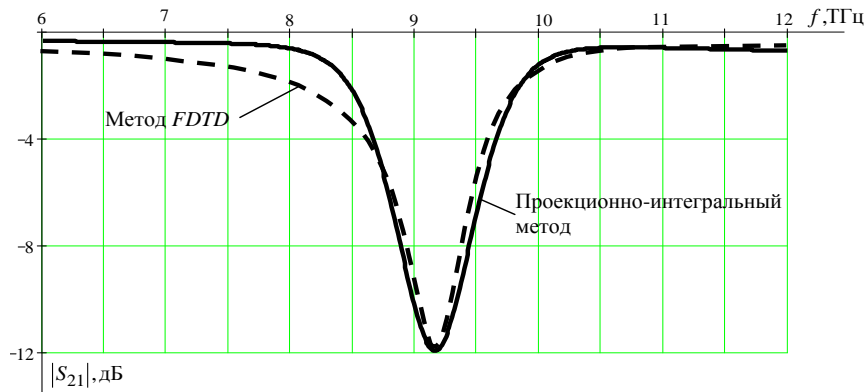


Рисунок 9 – Сравнение результатов расчета коэффициента прохождения для периодической структуры из полос графена, полученных различными методами:  $l/a = 0,99$ ,  $\mu_c = 0,6$  эВ

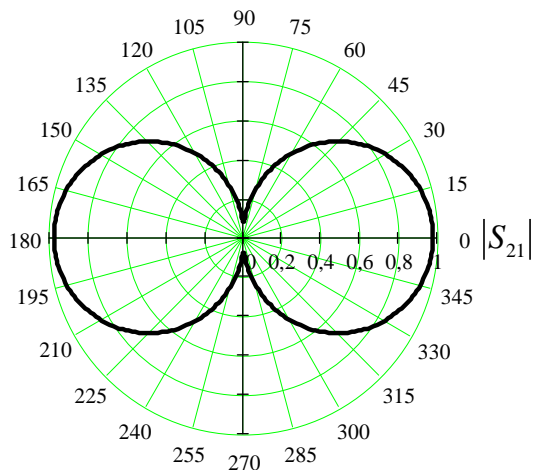


Рисунок 10 – Зависимость коэффициента прохождения через периодическую структуру из полос графена на частоте  $f = 28,3$  ТГц от угла ориентации падающей  $TEM$ -волны в полярной системе координат:  $h = 0,5$  мкм,  $a = 2$  мкм,  $l/a = 0,9$ ,  $b = 0,2$  мкм;  $w = 0,1$  мкм,  $\mu_c = 0,57$  эВ,  $\epsilon = 2,2$

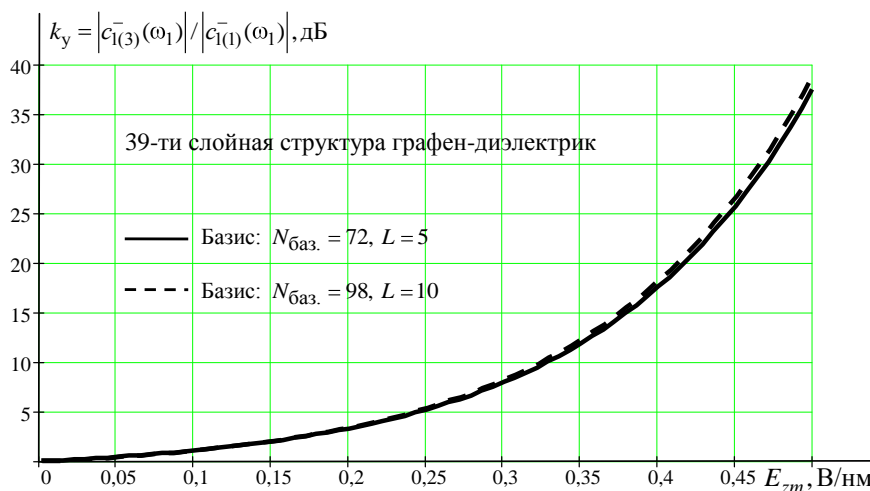


Рисунок 11 – Зависимость коэффициента усиления параметрического усилителя от амплитуды волны накачки: рабочая точка –  $E_{z0} = 0,5$  В/нм,  $f_1 = 14,15$  ТГц,  $f_2 = 28,3$  ТГц

Изучение многослойной структуры графен-диэлектрик терагерцового диапазона частот ЭМ-волн в режиме параметрической генерации сводится к анализу определителя матрицы системы алгебраических уравнений (10). Вычислительный эксперимент показал, что в 39-ти слойной структуре графен-диэлектрик генерация волн на частоте 14,15 ТГц не наблюдалась. Необходимо или увеличивать амплитуду волны накачки или количество листов графена в структуре. Параметрический генератор построен на основе 79-ти слойного фильтра Фабри-Перо. Результаты расчетов показали, что при изменении электрического поля смещения для химического потенциала на величину  $\Delta E_{z0} = 0,5 \text{ В/нм}$  резонансная частота фильтра Фабри-Перо изменяется на 18% (для 39-ти слойного фильтра – 10%). Область неустойчивости при параметрическом возбуждении показана на рисунке 12. В области неустойчивости 79-ти слойная структура графен-диэлектрик является генератором электромагнитных волн с частотой 14,15 ТГц. В этой области определитель матрицы системы алгебраических уравнений (10) обращается в нуль или близок к нулю.

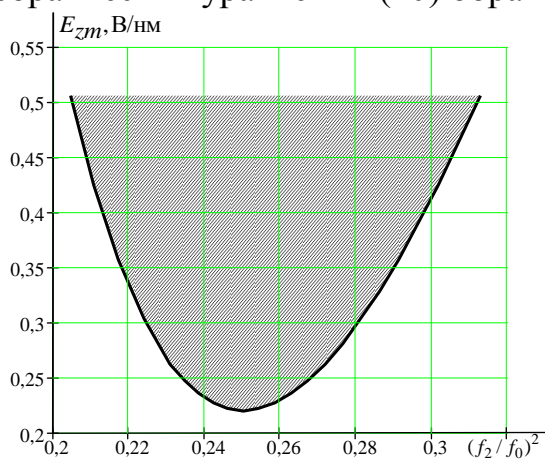


Рисунок 12 – Область неустойчивости при параметрическом возбуждении: рабочая точка накачки –  $E_{z0} = 0,5 \text{ В/нм}$ , собственная частота структуры графен-диэлектрик  $f_0 = 14,15 \text{ ТГц}$

Из графиков на рисунках 11, 12 следует перспективность разработки и создания параметрических усилителей и генераторов терагерцового диапазона частот ЭМ-волн на основе многослойных структур графен-диэлектрик.

**В заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ ПО РАБОТЕ

1. Разработан на основе декомпозиционного подхода метод математического моделирования наноструктурированных объектов с использованием базовых элементов (автономных блоков) в виде прямоугольных параллелепипедов с однородным и кусочно-неоднородным заполнением графеном.

2. Найдено аналитическое решение краевой задачи дифракции ЭМ-волн для автономного блока в виде прямоугольного параллелепипеда с однородным заполнением графеном, для автономного блока получен дескриптор в виде матрицы проводимости.

3. Численным проекционным методом решена краевая задача дифракции ЭМ-волн для автономного блока в виде прямоугольного параллелепипеда с кусочно-неоднородным заполнением графеном.

4. Разработан численный алгоритм рекомпозиции автономных блоков с дескрипторами автономных блоков в виде матриц проводимости.

5. Разработан метод математического моделирования параметрических явлений в наноструктурированных объектах на основе графена, базирующейся на связанных системах уравнений Максвелла, полученных на комбинационных частотах.

6. Разработан численный проекционный метод решения краевой задачи дифракции в многослойных структурах графен-диэлектрик на комбинационных частотах с использованием базисных функций, обладающих однородно-периодическими краевыми условиями и позволяющих исключить из базиса потенциальные функции, тем самым сократить размерность базиса.

7. Разработан комплекс программ для математического моделирования наноструктурированных объектов на основе графена и разработана методика использования программ для моделирования отдельных устройств обработки сигналов терагерцового диапазона: управляемого фильтра на основе многослойной структуры графен-диэлектрик, управляемого поляризатора на основе двумерной периодической структуры из лент графена, параметрического усилителя и генератора на основе многослойной структуры графен-диэлектрик.

8. Проведены комплексные исследования управляемого фильтра на основе многослойной структуры графен-диэлектрик, управляемого поляризатора на основе двумерной периодической структуры из лент графена, параметрического усилителя и генератора на основе многослойной структуры графен-диэлектрик с применением технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента. Полученные данные позволяют сделать вывод о перспективности создания устройств терагерцового диапазона частот ЭМ-волн на базе графена.

9. Сравнение результатов математического моделирования наноструктурированных объектов на основе графена с результатами, полученными ранее конечно-разностным методом во временной области (*FTDT*) подтвердило адекватность разработанных методов математического моделирования и численных методов.

## **ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

### **Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК**

1. Вареница, В.В. Математическое моделирование прохождения терагерцового излучения через монослой графена / Г.С. Макеева, О.А. Голованов, В.В. Вареница, Д.В. Артамонов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 3 (31). – С. 145–158.

2. Вареница, В.В. Математическое моделирование дифракции ТЕМ-волны на периодических 2D-структурах из микролент графена конечной длины в терагерцовом диапазоне / О.А. Голованов, Г.С. Макеева, В.В. Вареница // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2014. – Т. 17. – № 4. – С. 17–25.

3. Вареница, В.В. Математическое моделирование управляемых поляризаторов терагерцового диапазона на основе периодических 2D-структур из прямоугольных нанолент графена / Г.С. Макеева, О.А. Голованов, В.В. Вареница,

Р.А. Горелов // Известия вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 2 (34). – С. 203–216.

4. Вареница, В.В. Электродинамический расчет коэффициентов прохождения ТЕМ-волны через многослойные периодические структуры графен-диэлектрик в терагерцовом диапазоне / О.А. Голованов, Г.С. Макеева, В.В. Вареница // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 4 (32). – С. 108–122.

5. Вареница, В.В. Расчет эффективности управления проводимостью графена действием электрического поля в терагерцовом диапазоне частот / О.А. Голованов, Г.С. Макеева, В.В. Вареница, Р.А. Горелов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2015. – Т. 18. – № 2. – С. 27–32.

6. Вареница, В.В. Исследование фильтров терагерцового диапазона частот на основе многослойных структур графен-диэлектрик с применением численного эксперимента / О.А. Голованов, А.А. Тюмин, В.В. Вареница // Вопросы оборонной техники. Серия 16. Технические средства противодействия терроризму. – 2015. – №3-4. – С. 66–71.

7. Вареница, В.В. Исследование параметрического усиления и генерации в многослойных структурах графен-диэлектрик / О.А. Голованов, А.А. Тюмин, В.В. Вареница // Вопросы оборонной техники. Серия 16. Технические средства противодействия терроризму. – 2015. – №3-4. – С. 61–65.

8. Вареница, В.В. Математическое моделирование магнитных нанокompозитов на основе углеродных нанотрубок с магнитными наночастицами / О.А. Голованов, В.В. Вареница // Вопросы оборонной техники. Серия 16. Технические средства противодействия терроризму. – 2015. – №5-6. – С. 105–111.

#### **Публикации в других изданиях**

9. Вареница, В.В. Проводимость графена в терагерцовом и инфракрасном диапазонах частот / О.А. Голованов, Г.С. Макеева, В.В. Вареница // Надежность и качество сложных систем. – 2014. – № 4 (8). – С. 26–33.

10. Вареница, В.В. Математическое моделирование электрически управляемых фильтров терагерцового диапазона на основе периодических слоистых микроструктур графен-диэлектрик / Г.С. Макеева, О.А. Голованов, В.В. Вареница, И.А. Петров // Доклады II Всероссийской Микроволновой конференции (Москва, 26–28 ноября 2014 г.). – М.: Издание IRE – ИРЭ им. В.А.Котельникова РАН, 2014. – С. 283–288.